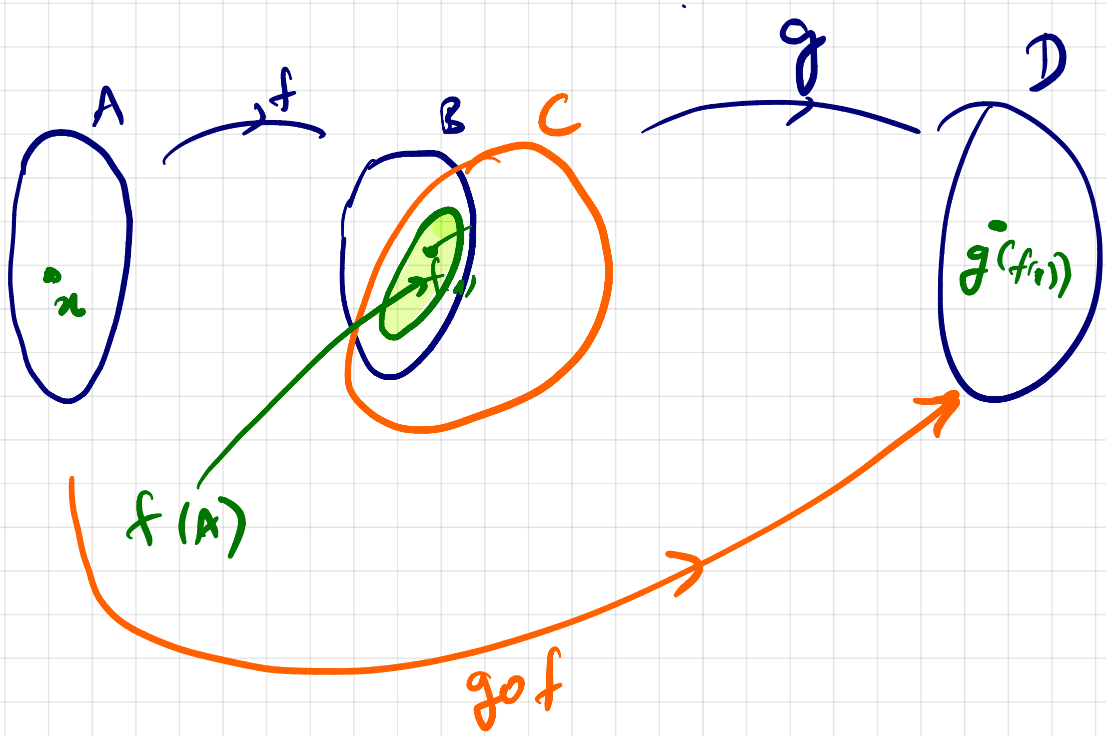
07/11/23 — AULA 04

COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES:

Def: Sejam $f: A \to B$, $g: C \to D$ funções tais que $f(A) \subset C$.
Definimos a função composta $g \circ f : A \to D$ por:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$



Ex.: $f: [0, +\infty) \to [1, +\infty)$, $f(x) = \sqrt{x+1}$

$g: [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$

Existe $g \circ f$? Se sim, qual é?

SOLUÇÃO:

$$\begin{tikzcd} {[0, +\infty)} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & {[1, +\infty)} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

É possível montar $g \circ f$

$g \circ f: [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x+1}\right) = \left(\cancel{\sqrt{(x+1)}}\right)^{\cancel{2}} = x+1$$

POR EXEMPLO: PARA $x = 2 \in [0, +\infty)$:

$(g \circ f)(2) = 2+1 = 3$; ou ainda:

$f(2) = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$

$g(f(2)) = (\cancel{\sqrt{3}})^2 = 3$

02) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^2+1$; $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g(x) = \dfrac{1}{x^2+2}$

Neste caso, temos:

- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+1) = \dfrac{1}{(x^2+1)^2+2}$

$$= \frac{1}{x^4+2x^2+1+2} = \frac{1}{x^4+2x^2+3}$$

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\dfrac{1}{x^2+2}\right) = \left(\dfrac{1}{x^2+2}\right)^2 + 1$

$$= \frac{1}{(x^2+2)^2} + 1$$

PROPOSIÇÃO: A composição de funções não estraga injetividade, sobrejetividade e bijetividade.
Ou seja, a composição de funções injetivas resulta em uma função injetiva, et cetera.

DEMONSTR.: Mostraremos apenas que composição de injetivas resulta em uma função injetiva. De fato, sejam $f: A \to B$ e $g: B \to C$ injetivas. Então:

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \Rightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \Rightarrow$$

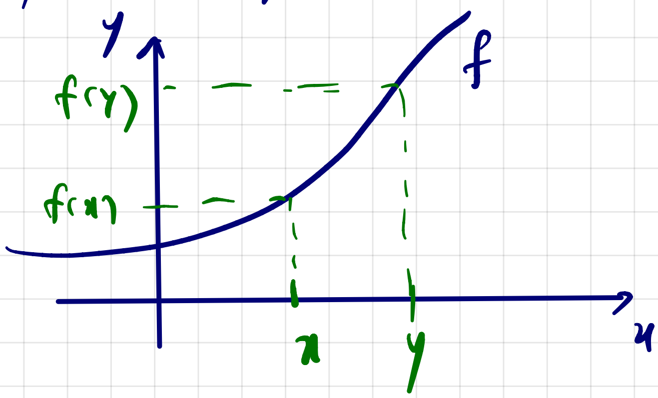
pois g é injetiva.

$$\Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

pois f é injetiva.

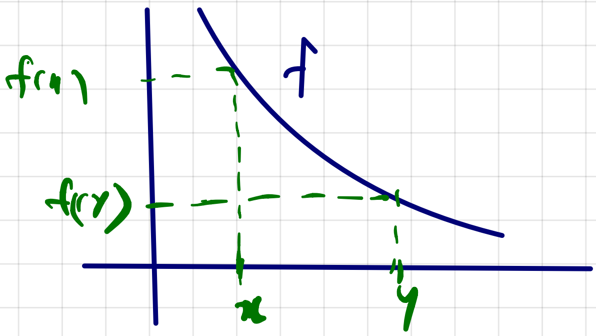
$\square$

Def.: Dizemos que uma função $f: A \to B$ é crescente se:
$\forall x, y \in A$; $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.



Obs.: quando $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$, dizemos que f é ESTRITAMENTE CRESCENTE.

Def.: Dizemos que $f: A \to B$ é DECRESCENTE se $\forall x, y \in A$, $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

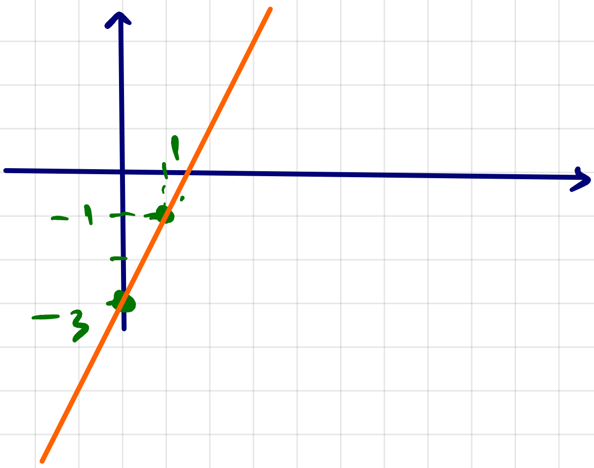


Obs.: quando $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$, dizemos que f é ESTRITAMENTE DECRESCENTE.

TIPOS DE FUNÇÕES:

(a) **FUNÇÃO AFIM:** São funções da forma $f(x) = a \cdot x + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Seu esboço gráfico é uma linha reta.

Ex.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$



x	$y = f(x)$
0	$2 \cdot (0) - 3 = -3$
1	$2 \cdot (1) - 3 = -1$

PROPOSIÇÃO: Dada $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, se $a > 0$, f é crescente, se $a < 0$, f é decrescente.

DEMONSTR.: Dados $x, y \in \mathbb{R}$ com $x < y$

- Suponha $a > 0$. Vamos mostrar que f é crescente.

De fato:

$$x < y \underset{\times\, a>0}{\Longrightarrow} a \cdot x < a \cdot y \Rightarrow ax + b < ay + b$$

$$\Rightarrow f(x) < f(y)$$

Logo, f é crescente.

- Suponha $a < 0$. Vamos mostrar que f é decrescente.

De fato, se

$$x < y \underset{(\times\, a<0)}{\Longrightarrow} a \cdot x > a \cdot y \Rightarrow a \cdot x + b > a \cdot y + b$$

$$\Rightarrow f(x) > f(y)$$

Logo, f é decrescente.

$\square$

(b) FUNÇÃO QUADRÁTICA (OU FUNÇÃO POLINOMIAL DE 2º GRAU)

São as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ do tipo

$$f(x) = ax^2 + bx + c \; ; \text{ com } a \neq 0.$$

O esboço gráfico dessa função chama-se uma parábola.

CASO 1: $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$.

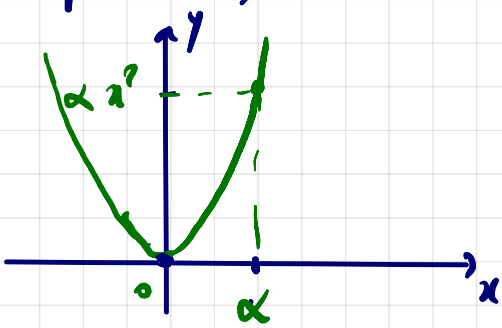
Vamos assumir $a > 0$.

Então, $f(x) = ax^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Logo, $Im(f) = [0, +\infty)$

o gráfico de f está sempre acima do eixo x. $(a>0)$

O aspecto gráfico de f será tal que, $\forall x \in \mathbb{R}$, f(x) será maior do que x (um múltiplo positivo).



Obs.: zeros de uma função: são os pontos onde $f(x) = 0$. (onde o gráfico de f intercepta o eixo horizontal)

No nosso caso, os zeros de $f(x) = ax^2$ serão

$$f(x) = 0 \iff ax^2 = 0 \iff x = 0$$

CASO 2 (geral): $y = ax^2 + bx + c$

Vamos completar um quadrado perfeito.

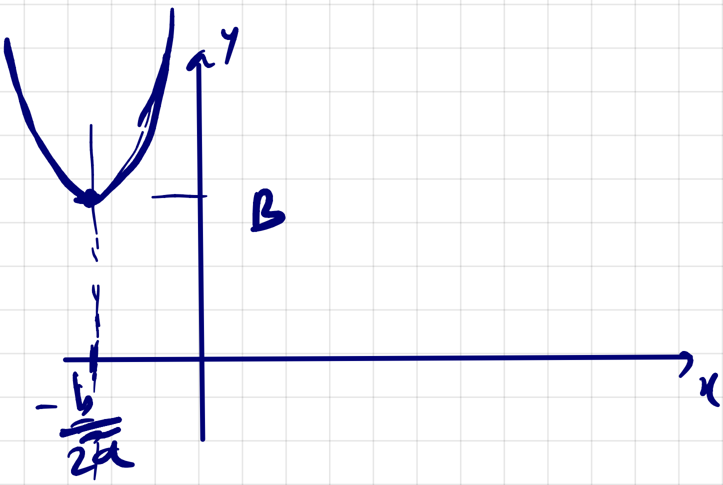
$$y = ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a \cdot \left[\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \frac{b^2}{4a^2}} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\cdot a$$

$$= a\cdot X^2 + B$$

Escreva $X = x + \frac{b}{2a}$



ou seja, o gráfico de $y = ax^2+bx+c$ $(a>0)$ continua sendo uma parábola, mas transladada em relação à origem.

zeros de $y = ax^2+bx+c$.
serão quando $f(x) = 0$; i.e, quando

$$ax^2+bx+c = 0$$

$$= a\cdot\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = 0$$

Como $a \neq 0$, então $\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = 0$

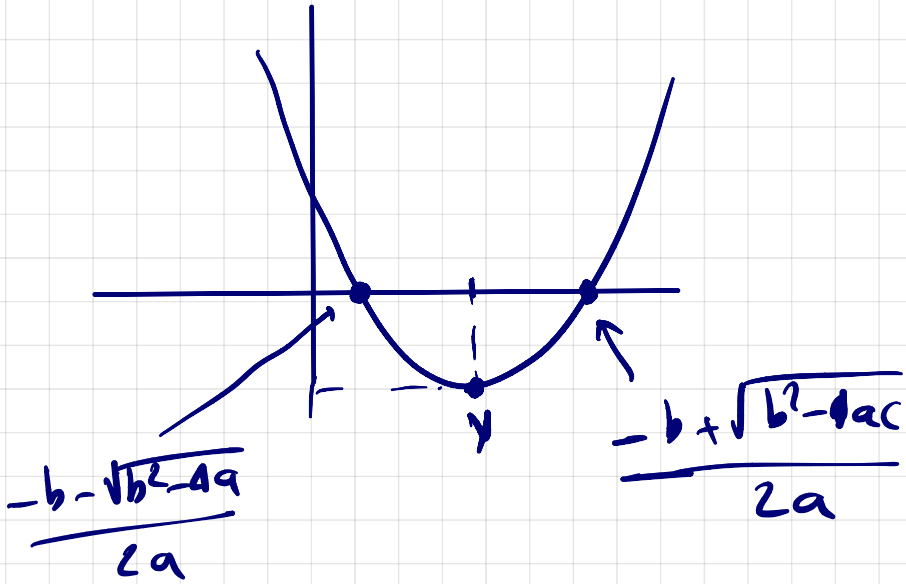
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ (zeros da função)



O vértice é o ponto $V(x_v, y_v)$, onde

x_v é o ponto médio entre as raízes, ou seja,

$$x_v = \frac{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}{2}$$

$$= \frac{\frac{-b + \cancel{\sqrt{b^2-4a}} - b - \cancel{\sqrt{b^2-4ac}}}{2a}}{2}$$

$$= \frac{-\frac{b}{a}}{2} = \frac{-b}{2a}$$

$$y_v = f(x_v) = a\cdot\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\cdot\left(-\frac{b}{2a}\right) + c$$

$$= \frac{\cancel{a}b^2}{4a^{\cancel{2}}} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$= \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}$$

$$= \frac{-b^2+4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$V(x_v, y_v) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

Ex.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Esboce seu gráfico, indicando as coordenadas do vértice. Qual a sua imagem?

solução: zeros: $f(x) = 0 \iff x^2 - 4x + 3 = 0$

$$\iff x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2\cdot 1}$$

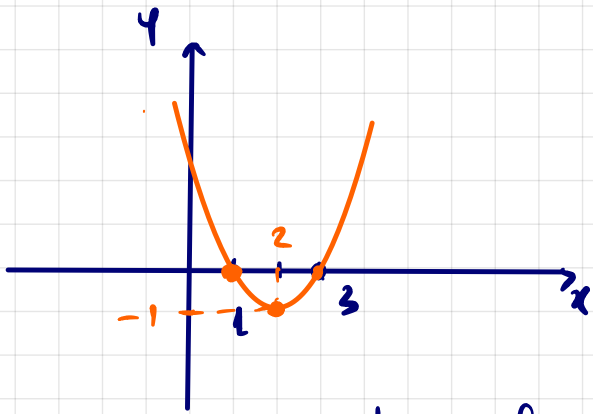
$$x = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = \frac{4+2}{2} = 3 \\ x = \frac{4-2}{2} = 1 \end{cases}$$

$V(x_v, y_v)$; $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2\cdot 1} = 2$

$$y_v = f(x_v) = (2)^2 - 4\cdot(2) + 3$$

$$y_v = 4 - 8 + 3 \Rightarrow \boxed{y_v = -1}$$

$$V = (2, -1)$$



$$Im(f) = [-1, +\infty)$$

Obs: • f não é injetiva, pois domínios diferentes possuem mesma imagem. Ex: $1 \neq 3$, mas $f(1) = f(3) = 0$

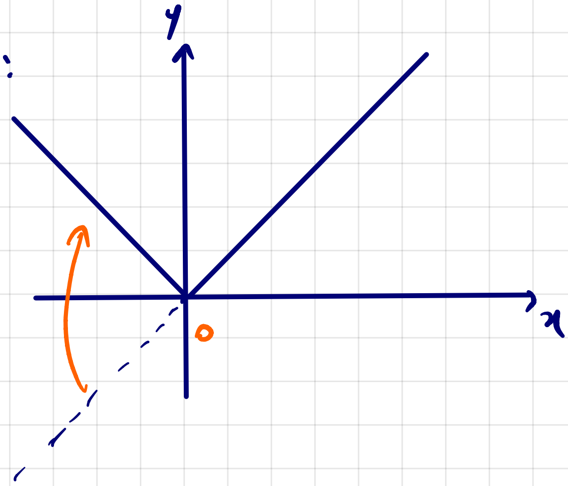
• f não é sobrejetiva pois $Im(f) = [1, +\infty) \neq \mathbb{R} = CD(f)$.

Obs: Se $a > 0$, a concavidade da parábola é voltada para cima e se $a < 0$, a concavidade fica voltada para baixo [ISTO FICARÁ JUSTIFICADO QUANDO ESTUDARMOS DERIVADAS]

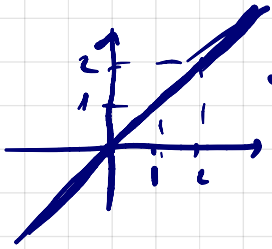
(c) FUNÇÃO MÓDULO: É a função do tipo

$$f(x)=|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x\geq 0\\ -x, & \text{se } x<0\end{cases}$$

gráfico:

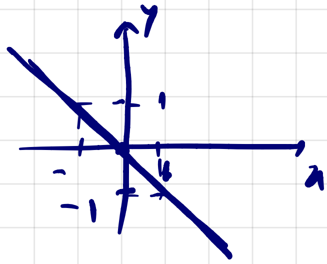


$Y=x$ é a reta



bissetriz dos quadr. ímpares.

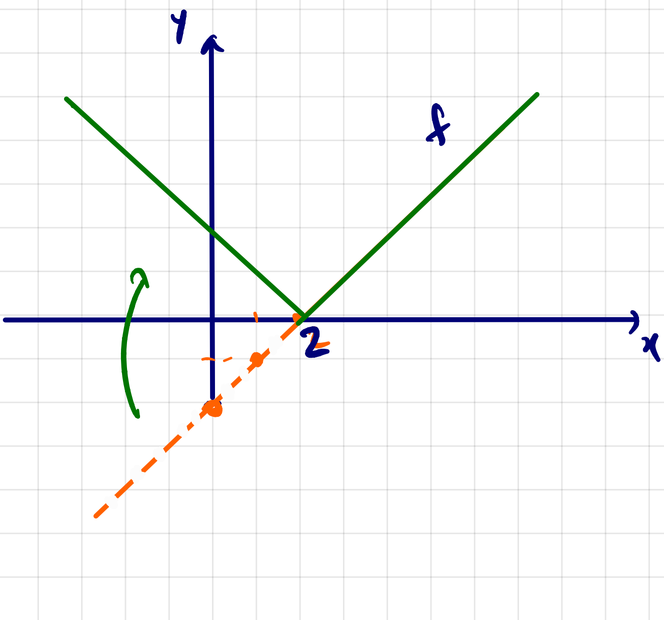
$Y=-x$ é a reta:



Exemplos variantes:

(i) $f(x) = |x-2|$ gráfico?

solução: gráfico de $y=x-2$ (FUNÇÃO AFIM)



x	$y=x-2$
0	-2
1	-1

$$f(x) = |x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{se } x-2 \geq 0 \\ -(x-2), & \text{se } x-2 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x-2, & \text{se } x \geq 2 \\ -x+2, & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

(ii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^2 - 5|x| + 6$

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 6, & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 - 5\cdot(-x) + 6, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 - 5x + 6, & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 + 5x + 6, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$