Cálculo IV

10/11/23 — Aula 05

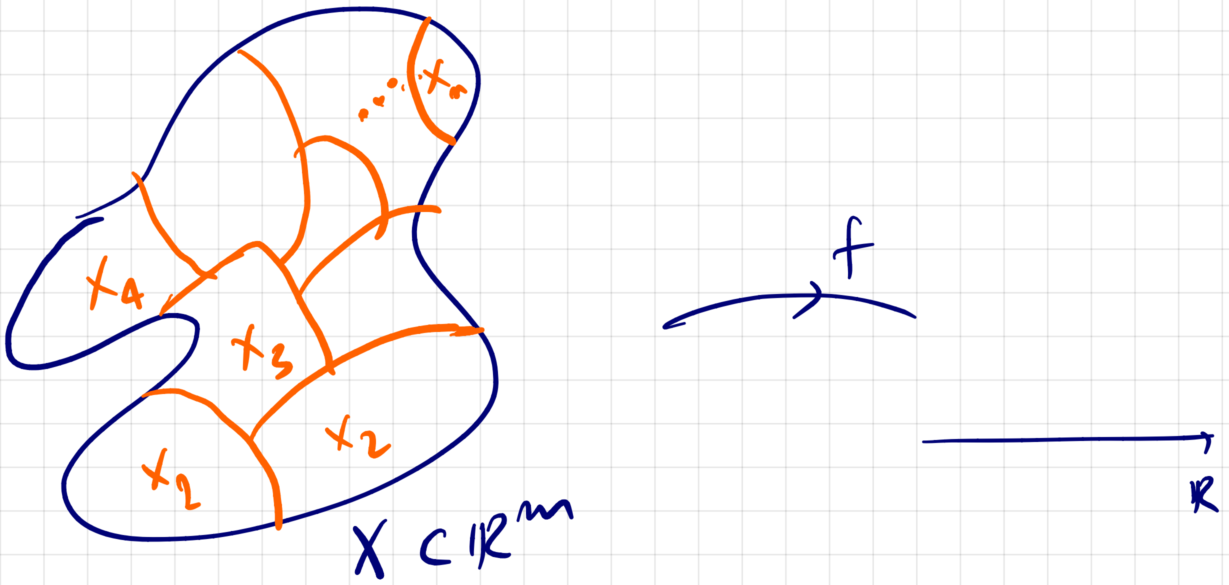
Integral de Riemman:

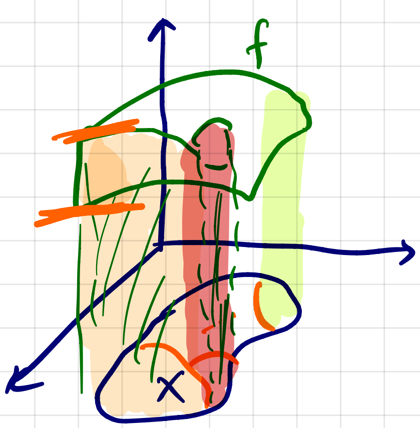
Seja $X \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto J-mensurável e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função limitada.

Seja D uma decomposição do conj. X, ou seja, $D = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ tais que

$$X = \bigcup_{j=1}^{n} X_j, \text{ com } \operatorname{int}(X_i \cap X_j) = \emptyset \text{ se } i \neq j,$$

e X_i são J-mensuráveis mensuráveis.





Sejam

$$m_i = \inf_{x \in X_i} f(x) \quad \text{e}$$

$$M_i = \sup_{x \in X_i} f(x), \text{ respectiv.};$$

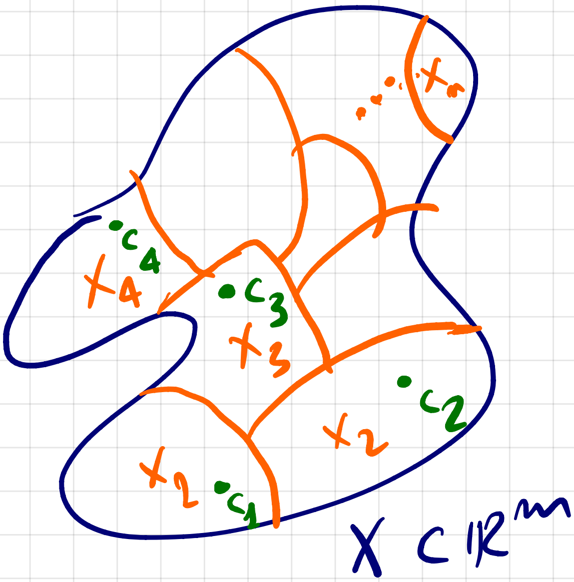
o ínfimo e o supremo de f em cada subregião X_i da decomposição D.

As somas inferior e superior de f em relação à decomposição D serão:

$$s(f; D) = \sum_{i=1}^{m} m_i \cdot Vol(X_i) \quad , \quad e$$

$$S(f; D) = \sum_{i=1}^{m} M_i \cdot Vol(X_i)$$

Seja $c_i \in X_i$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$ um ponto qualquer em cada subregião X_i da decomposição D.



Isto define uma DECOMPOSIÇÃO PONTILHADA

$$D^* = (D, f(c_i)).$$

Isto posto, definimos a SOMA DE RIEMANN

de f em relação à partição pontilhada D^* por:

$$\Sigma(f;D^*) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i).\mathrm{Vol}(X_i)$$

Como, $\forall i \in \{1,2,3,\dots,n\}$ vale

$$m_i \leq f(c_i) \leq M_i$$

Então, multiplicando por $\mathrm{Vol}(X_i) > 0$ e somando sobre todos os índices n, vamos obter:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \,\mathrm{Vol}(X_i) \leq \sum_{i=1}^{n} f(c_i).\mathrm{Vol}(X_i) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i.\mathrm{Vol}(X_i),$$

ou seja, obtemos:

$$s(f;D) \leq \Sigma(f;D^*) \leq S(f;D)$$

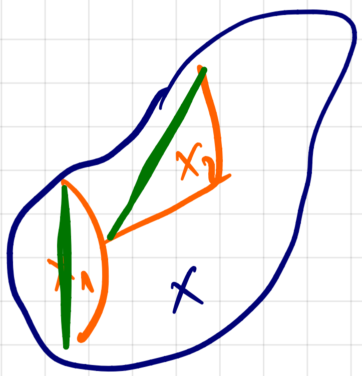
Esta desigualdade será fundamental para fazer a demonstração do seguinte teorema.

<u>TEOREMA:</u> Seja $f: X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função integrável no conj. J-mensurável X. Então

$$\int_X f = \lim_{\|D^*\|\to 0} \Sigma(f;D^*)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i).\mathrm{Vol}(X_i)$$

obs: $\|D^*\|$: NORMA DA DECOMPOSIÇÃO PONTILHADA é o supremo do conjunto dos maiores segmentos de todos os X_i.

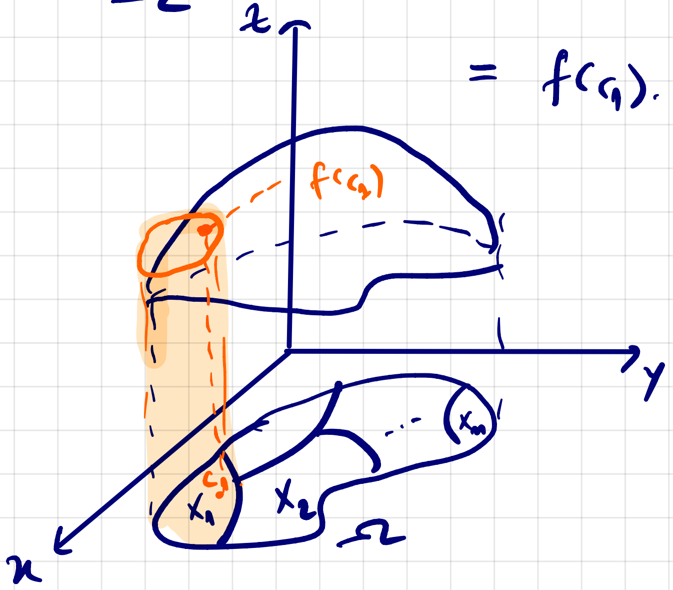


INTEGRAIS DUPLAS: No que segue vamos considerar $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, Ω - conjunto J-mensurável.

Sendo $D = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ uma decomposição para Ω, então, para $c_i \in X_i$:

$$\int_\Omega f = \iint_\Omega f = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot Vol(X_i),$$

$$= f(c_1) \cdot \underline{Vol(X_1)} + f(c_2) \cdot \underline{Vol(X_2)} + \dots + f(c_n) \cdot \underline{Vol(X_n)}$$

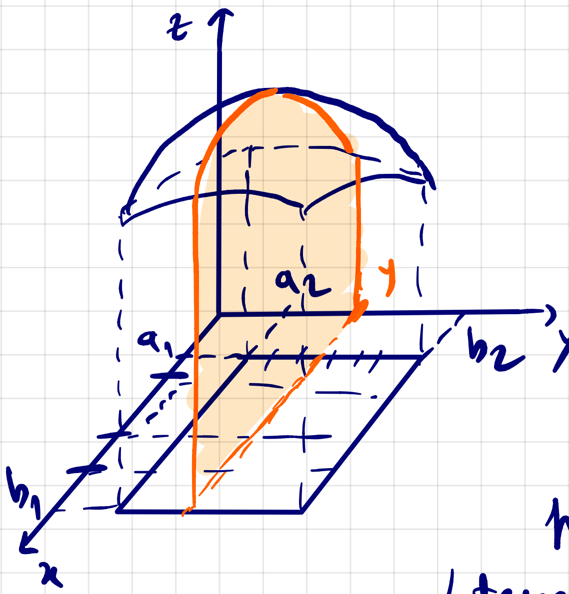


estes VOLUMES, neste caso, são áreas.

Mas, como calcular $\iint_\Omega f$?

Para fins de compreensão geométrica, assuma $f \geq 0$.

CASO SIMPLES: $\Omega = A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ (um retângulo)



Seja $y \in [a_2, b_2]$ e tome uma partição P de $[a_1, b_1]$.

Seja o plano paralelo ao plano xz, passando por $y \in [a_2, b_2]$, determinando uma LÂMINA abaixo do gráfico de f, c.f. ilustração ao lado.

A área $A(y)$ dessa lâmina é dada por

$$A(y) = \int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx \quad , \quad \forall\, y \in [a_2, b_2]$$

Pelo PRINCÍPIO DE CAVALIERI (Geom. Espacial), o volume V do sólido obtido no retângulo A, abaixo do gráfico de f, será:

$$V = \int_{a_2}^{b_2} A(y)\,dy = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx \right) dy \,,$$

que chama-se INTEGRAL ITERADA de f.

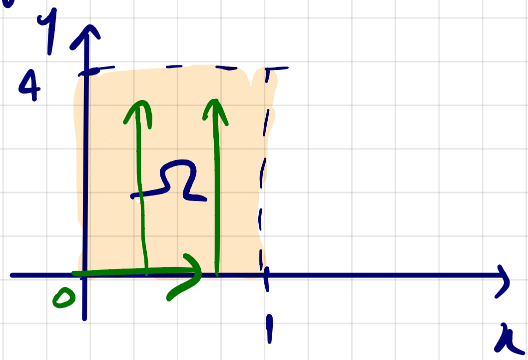
Obs.: Também poderíamos ter

$$V = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\, dy \right) dx.$$

Ex.: 01) $\iint_A (3x+2y)\,dx\,dy$, onde $A = [0,1] \times [0,4]$

Este exemplo foi feito por definição (na aula 2) e havíamos encontrado como resposta $\iint_A (3x+2y)\,dx\,dy = 22$.

Vejamos pelo cálculo iterado:



$$\iint_A (3x+2y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{y=0}^{y=4} \left(\int_{x=0}^{x=1} (3x+2y)\,dx \right) dy =$$

$$= \int_{y=0}^{y=4} \left(\frac{3x^2}{2} + 2y.x \right) \Bigg|_{x=0}^{x=1} dy = \int_{y=0}^{y=4} \left[\left(\frac{3}{2} + 2y \right) - (0+0) \right] dy$$

T.F.C

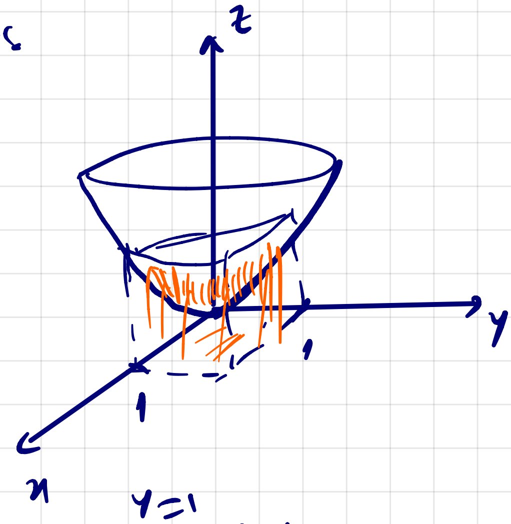
$$= \int_0^4 \left(\frac{3}{2} + 2y \right) dy = \left(\frac{3}{2}y + y^2 \right) \Bigg|_0^4 =$$

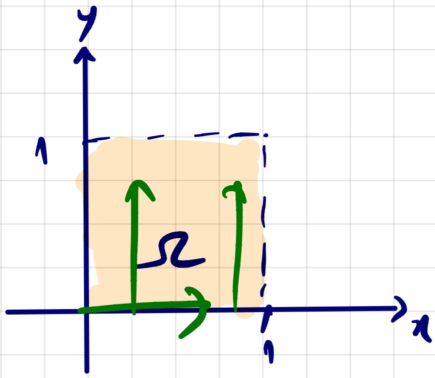
$$\frac{3}{\cancel{2}} \cdot (\cancel{4}^{2}) + (4)^2 - (0+0) = 6 + 16 = 22$$

02) $f(x,y) = x^2+y^2$ em $A = [0,1]\times[0,1]$.

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = ?$$

solução:





$$\iint_A f = \int_{y=0}^{y=1}\left(\int_{x=0}^{x=1}(x^2+y^2)\,dx\right)dy =$$

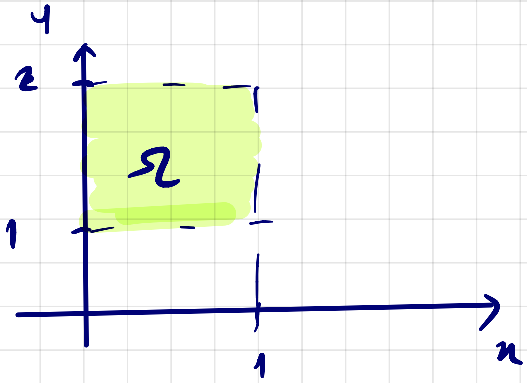
$$= \int_{y=0}^{y=1}\left(\frac{x^3}{3}+y^2\cdot x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} dy =$$

$$= \int_{y=0}^{y=1}\left[\frac{1}{3}+y^2-(0+0)\right]dy = \left(\frac{1}{3}y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{3}+\frac{1}{3}-(0+0) = \frac{2}{3}$$

03) $\int_1^2 \int_0^1 \cos(xy)\, dx\, dy = ?$

$\int \cos u\, du = \operatorname{sen} u + C$



$$\int_{y=1}^{y=2} \left(\int_{x=0}^{x=1} \frac{1}{y} \cos(xy) \cdot y \cdot dx \right) dy = \int_{y=1}^{y=2} \frac{1}{y} \left(\int_{x=0}^{x=1} \cos(xy) \cdot (y\, dx) \right) dy$$

$$= \int_{y=1}^{y=2} \frac{1}{y} \cdot \operatorname{sen}(xy) \Big|_{x=0}^{x=1} dy = \int_{y=1}^{y=2} \frac{1}{y} \cdot (\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} 0)\, dy$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{y} \cdot \operatorname{sen} y\, dy = \qquad \text{etc.}$$

NÃO HÁ UMA TÉCNICA PARA INTEGRAÇÃO. A ÚNICA SAÍDA É EXPRESSAR sen y EM SÉRIE DE POT.

Note que:

$$\int \frac{\operatorname{sen} y}{y} dy = \int \frac{1}{y} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot y^{2n-1}}{(2n-1)!} \cdot dy$$

(...)