

**Universidade Federal de Pelotas**  
**Disciplina de Cálculo 2 - Turma T2**  
**Prof. Dr. Maurício Zahn**

**Lista 01 de Exercícios - Integral definida: primeiros conceitos**

1. Apenas pelo esboço gráfico, determine as seguintes integrais definidas:

(a)  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$       (b)  $\int_0^2 (x-1)dx$       (c)  $\int_1^2 (x+2)dx$       (d)  $\int_0^3 |x-2|dx$

2. Calcule  $\int_0^1 x dx$  diretamente da definição de integral, assumindo que esta integral exista.

3. Idem para  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2, & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases} .$$

4. Seja  $c$  um ponto do intervalo  $[a, b]$  e  $\alpha$  um número real. Mostre que a função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \alpha, & \text{se } x = c \\ 0, & \text{se } x \neq c \end{cases}$$

é integrável, e  $\int_a^b f(x) dx = 0$ .

5. Justifique por que  $\int_0^1 x dx \geq \int_0^1 x^2 dx$  e por que  $\int_1^2 x dx \leq \int_1^2 x^2 dx$ .

6. Suponha que  $f$  e  $g$  sejam integráveis, com  $\int_1^9 f = -1$ ,  $\int_7^9 f = 5$  e  $\int_7^9 g = 4$ . Determine:

(a)  $\int_1^9 -2 \cdot f$       (b)  $\int_7^9 f + g$       (c)  $\int_7^9 3f - 3g$       (d)  $\int_9^1 f$       (e)  $\int_1^7 f$

7. Calcule  $\int_0^3 (x^3 - 6x)dx$ , usando uma partição regular.

8. Calcule  $\int_{-2}^1 x^4 dx$ , usando uma partição regular.

9. Se a função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável em  $[a, b]$ , definimos o *valor médio VM* de  $f$  no domínio  $[a, b]$  por

$$VM = \frac{\int_a^b f}{b-a}.$$

Encontre o valor médio para  $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2$ .

10. Se  $f$  é integrável e  $m$  e  $M$  são tais que  $m \leq f(x) \leq M$ ,  $\forall x \in [a, b]$  (i.e.,  $f$  é limitada em  $[a, b]$ ), mostre que

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

11. Se  $f$  é integrável (e então limitada) em  $[a, b]$ , mostre que

$$\left| \int_a^b f \right| \leq (b-a) \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

12. Use a fórmula

$$\sin h + \sin 2h + \sin 3h + \dots + \sin mh = \frac{\cos \frac{h}{2} - \cos \left( (m + \frac{1}{2}) h \right)}{2 \sin \frac{h}{2}}$$

para determinar a área sob a curva  $y = \sin x$  de  $x = 0$  até  $x = \frac{\pi}{2}$ . Faça de duas etapas:

- (a) Divida o intervalo  $[0, \frac{\pi}{2}]$  em  $n$  subintervalos de igual comprimento (partição regular  $P$ ) e calcule a correspondente soma superior.
- (b) Determine  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S(f; P)$ .

13. Seja  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de Lipschitz, i.e.,  $\exists K > 0$  tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|,$$

para quaisquer  $x, y \in [0, 1]$ . Mostre que

$$\left| \int_0^1 f - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \right| < \frac{K}{2n}.$$