27/10/23 – AULA 02

LEMA: Seja $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função limitada no bloco A e P e Q duas partições de A. Então,

$$s(f; P) \leq S(f; Q)$$

[Ou seja, qualquer soma inferior é sempre menor ou igual a qualquer soma superior].

DEMONSTR.: Basta tomar a seguinte partição:

$$P+Q := \prod_{i=1}^{m} (P_i \cup Q_i),$$

que será um refinamento para P e para Q.

[lembre que $P = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_m$
$Q = Q_1 \times Q_2 \times \cdots \times Q_m$]

Assim, pelo resultado final da aula passada:

$$s(f;P) \leq s(f; P+Q) \leq S(f;P+Q) \leq S(f;Q)$$

□

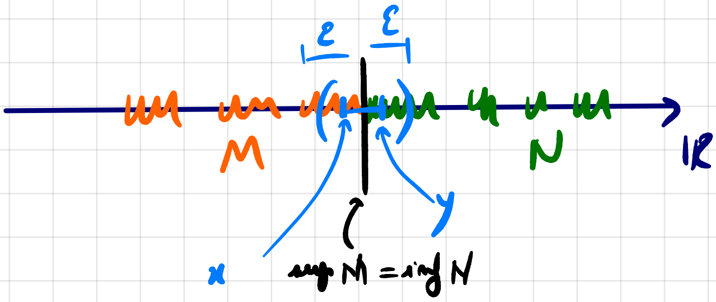
De um resultado da Análise real, temos:
(não provaremos aqui)

PROP.: Sejam $M, N \subset \mathbb{R}$ tais que, $\forall x \in M, \forall y \in N$ $x \leq y$.

Então, $\sup M \leq \inf N$.

Além disso, $\sup M = \inf N$, se, e somente se,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in M,\ \exists y \in N \text{ tais que } y - x < \varepsilon.$$



Inspirados por este resultado, vamos adaptá-lo para nosso estudo. Seja $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função limitada no bloco $A \subset \mathbb{R}^m$. Tome

$$M = \{ s(f;P) : P \text{ é partição de } A \} \subset \mathbb{R}$$

$$N = \{ S(f;P) : P \text{ é partição de } A \} \subset \mathbb{R}.$$

Como $\underbrace{s(f;P)}_{x} \leq \underbrace{S(f;Q)}_{y}$, então estamos nas hipóteses da prop. acima. Portanto, segue que:

$$\sup M \leq \inf N, \text{ ou seja,}$$

$$\sup_{\substack{P \text{ partição} \\ \text{de } A}} s(f;P) \leq \inf_{\substack{P \text{ é partição} \\ \text{de } A}} S(f;P) \qquad (*)$$

Vamos definir a integral inferior e a integral superior de f em $A \subset \mathbb{R}^m$ por:

$$\underline{\int_A} f := \sup\{s(f;P) : P \text{ é partição de } A\}$$

e

$$\overline{\int_A} f := \inf\{S(f;P) : P \text{ é partição de } A\}.$$

Obviamente, por $(*)$ segue que

$$\underline{\int_A} f \leq \overline{\int_A} f.$$

Além disso,

Def!

$$\underline{\int_A} f = \overline{\int_A} f \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists P_1, P_2 \text{ partições do bloco } A \text{ tais que}$$

$$S(f;P_1) - s(f;P_2) < \varepsilon.$$

<u>Def.</u>: Seja $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função limitada no bloco $A \subset \mathbb{R}^m$. Então, f é integrável se, e somente se,

$$\underline{\int_A} f = \overline{\int_A} f\ ;$$

e este valor comum será a integral de f no bloco A, e será denotada por

$$\int_A f \quad \text{ou} \quad \int_A f(x)\,dx$$

Obs.: Se $A \subset \mathbb{R}^2$, escrevemos

$$\int_A f = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy$$

Note que:

f é integrável no bloco A $\Leftrightarrow \underline{\int_A} f = \overline{\int_A} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists P_1, P_2$ partições de A tais que $S(f;P_1) - s(f;P_2) < \varepsilon$

def. def.

PROPOSIÇÃO: (CRITÉRIO DE INTEGRABILIDADE) Seja $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função limitada no bloco A. Então, f é integrável em A se, e somente, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P$ partição de A tal que

$$S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon.$$

DEMONSTR.:

($\Rightarrow$): Suponha f integrável no bloco A.

Então, dado $\varepsilon > 0$, $\exists P_1, P_2$ partições do bloco A tais que

$$S(f;P_1) - s(f;P_2) < \varepsilon.$$

Tome $P = P_1 + P_2$, que será refinamento para P_1 e para P_2. Assim, c.f. o último resultado da aula passada, temos:

$$s(f;P_2) \leq s(f;P) \leq S(f;P) \leq S(f;P_1)$$

Assim:

$$S(f;P_1) - s(f;P_2) < \varepsilon$$

$$S(f;P) \leq S(f;P_1)$$

$$+ \quad -s(f;P) \leq -s(f;P_2)$$

$$S(f;P) - s(f;P) \leq S(f;P_1) - s(f;P_2) < \varepsilon$$

Ou seja, $\forall \varepsilon > 0$, obtemos P partição do bloco A tal que

$$S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon$$

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponha que, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ P partição do bloco A tal que $S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon$.
Então, basta tomar $P_1 = P_2 = P$. Assim, temos P_1 e P_2 partições tais que

$$S(f;P_1) - s(f;P_2) < \varepsilon \quad , \text{ i.e.,}$$

f é integrável no bloco A. $\square$

No que segue faremos alguns exemplos.

01) Calcule $\iint_A (3x+2y)\,dx\,dy$, onde A é o bloco

$$A = [0,1]\times[0,4].$$

Obs.: $f(x,y) = z = 3x+2y$ (eq. de um plano passando na origem do $\mathbb{R}^3$)

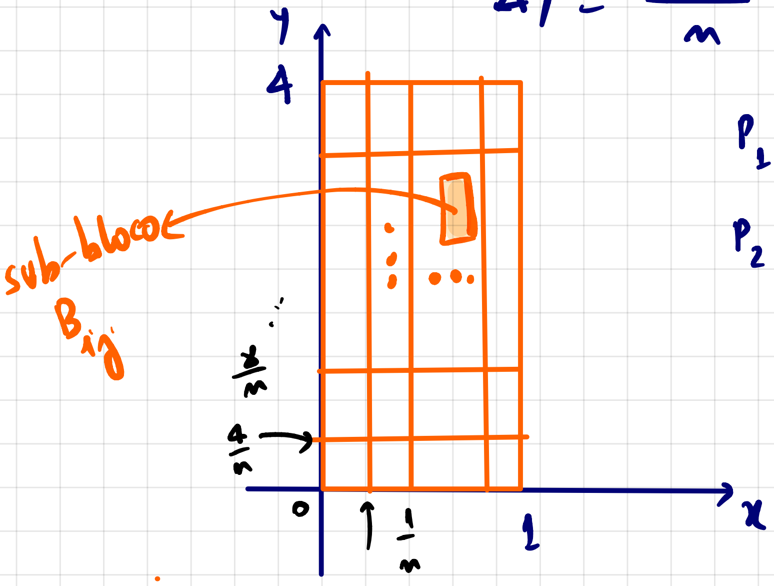
Note que $f \geq 0$ em A.

Solução: Seja $P = P_1 \times P_2$ uma partição regular do bloco A, tal que divide $[0,1]$ em n subintervalos de comprimento

$$\Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n};$$

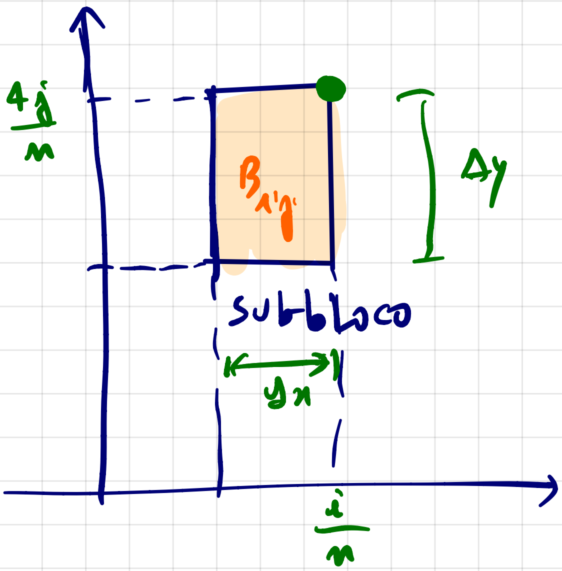
e divide $[0,4]$ em n subintervalos de comprimento

$$\Delta y = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}.$$



$$P_1 = \{0 < \tfrac{1}{n} < \tfrac{2}{n} < \dots < \tfrac{n}{n} = 1\}$$

$$P_2 = \{0 < \tfrac{4}{n} < 2\cdot\tfrac{4}{n} < \dots < n\cdot\tfrac{4}{n} = 4\}$$



$z = f(x,y) = 3x+2y$ é crescente.

Assim, o maior valor que f assume em cada sub-bloco será no vértice superior direito, de coordenadas:

$$\left(\frac{i}{n}, \frac{4j}{n}\right)$$

Como a partição P é regular, todos os sub-blocos B terão mesmo volume, que nosso caso, será numericamente igual à medida da sua área (retângulo); ou seja:

$$\underset{\sim\sim}{Vol(B)} = \Delta x . \Delta y = \frac{1}{n} . \frac{4}{n} = \underset{\sim}{\frac{4}{n^2}}.$$

Vamos determinar $S(f;P) = \sum_{B \in P} M_B . Vol(B)$,

onde $M_B = \sup_{(x,y) \in B} f(x,y) = \sup_{(x,y)\in B} (3x+2y) = (3x+2y)\Big|_{\substack{x = \frac{i}{n} \\ y = \frac{4j}{n}}} =$

$$= \frac{3i}{n} + \frac{8j}{n}.$$

Portanto, temos:

$$S(f;P) = \sum_{B\in P} M_B . Vol(B) = \sum_{B \in P} \left(\frac{3i}{n} + \frac{8j}{n}\right) . \frac{4}{n^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{12 i}{n^3} + \frac{32 j}{n^3}\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{12 i}{n^3} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{32 j}{n^3}$$

$$= \frac{12}{n^3} . \sum_{i=1}^{n} i . \sum_{j=1}^{n} 1 + \frac{32}{n^3} . \sum_{i=1}^{n} 1 . \sum_{j=1}^{n} j =$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(1+n).n}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = 1+1+\cdots+1 = n$$

$$= \frac{\cancel{12}^{6}}{\cancel{n^3}} \cdot \frac{(1+n)\cdot \cancel{n}}{\cancel{2}} \cdot \cancel{n} + \frac{\cancel{32}^{16}}{\cancel{n^3}} \cdot \cancel{n} \cdot \frac{(1+n)\cdot \cancel{n}}{\cancel{2}}$$

$$= 6 \cdot \left(\frac{1+n}{n}\right) + 16 \cdot \left(\frac{1+n}{n}\right) = 22 \cdot \left(\frac{1+n}{n}\right)$$

$$= 22 \cdot \left(\frac{1}{n} + 1\right)$$

$$\Longrightarrow \quad S(f; P) = 22 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Efetuando o limite com $n \to \infty$ estaremos refinando a partição P, e disso, obtemos:

$$\underbrace{\overline{\int_A} f}_{} = \lim_{n\to\infty} S(f;P) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 22 \cdot \left(1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{0}\right) = \underbrace{22}_{}$$

Do mesmo modo, se mostra que

$$\underbrace{\int_{\underline{A}} f}_{} = \lim_{n\to\infty} s(f;P) = \underbrace{22}_{}$$

Como $\int_{\underline{A}} f = \overline{\int_A} f = 22$, então f é integrável,

e $\boxed{\int_A f = 22}$.