31/10/23 – AULA 03

No final da aula anterior vimos o critério de integrabilidade (CRITÉRIO DE DARBOUX):

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ função limitada. Então:

f é integrável $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0$, $\exists\, P$ partição de $[a,b]$ tal que
$S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon$.

$\Updownarrow$

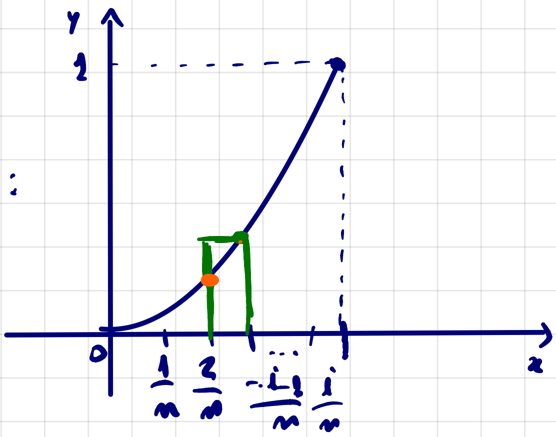
$\forall \varepsilon>0$, $\exists\, P$ partição de $[a,b]$ tal que
$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f;[t_{i-1},t_i])\cdot(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon.$$

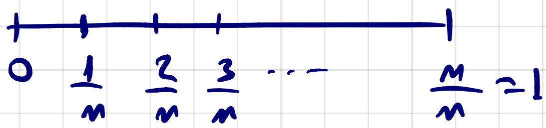
Vejamos alguns exemplos de cálculo de integral definida pela definição.

01) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$. $\displaystyle\int_0^1 f = ?$

Seja P_n a partição regular que divide o intervalo $[0,1]$ em n subintervalos de mesmo comprimento:

$$\Delta t_i = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n} = t_i - t_{i-1}$$





O i-ésimo subintervalo será:

$$[t_{i-1}, t_i] = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right]$$

Note, que, por construção, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$t_i = 0 + \frac{i}{n} = \frac{i}{n}$$

Como f é crescente em $[0,1]$, e além disso, como f é contínua, será contínua em cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$. Assim,

$$M_i = \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) = \max_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) = f(t_i)$$

e

$$m_i = \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) = \min_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) = f(t_{i-1})$$

Dessa forma, a soma superior de f em relação à partição P_n será:

$$S(f; P_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \underbrace{(t_i - t_{i-1})}_{\frac{1}{n}} = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot \frac{1}{n} \overset{(*)}{=}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(t_i) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (t_i)^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2 \; (=)$$

(*) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} k \cdot f(i) = k \cdot f(1) + k \cdot f(2) + \dots \; k \cdot f(n)$

$$= k \left[f(1) + f(2) + \dots + f(n) \right] = k \cdot \sum_{i=1}^{n} f(i)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) =$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\Rightarrow S(f, P_n) = \frac{1}{\cancel{n^3}_{2}} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left(1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{0}\right) \cdot \left(2 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{0}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3}$$

Ou seja, fazendo $n \to \infty$ obtemos um refinamento da partição regular P_n; e com isso, temos

$$\int_0^1 f = \lim_{n \to \infty} S(f, P_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}$$

Analogamente, tomando as somas inferiores e fazendo o limite com $n \to \infty$, vamos obter

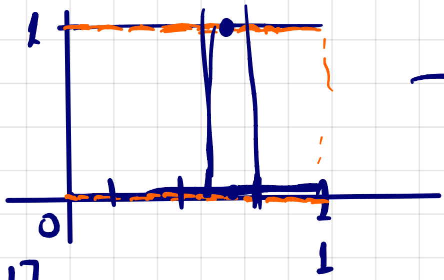
$$\int_0^1 f = \lim_{n\to\infty} s(f;P_n) = \frac{1}{3}$$

Portanto, f é integrável e $\int_0^1 f = \frac{1}{3}$.

02) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, dada por:

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{se } x\in\mathbb{Q}\\ 0, & \text{se } x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

chamada de FUNÇÃO DE DIRICHLET.



→ NÃO CONSEGUIMOS SEQUER DESENHAR UM ESBOÇO GRÁFICO DE f, POIS $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ SÃO DENSOS(*) EM $\mathbb{R}$.

Seja $P=\{0<t_1<t_2<\dots<t_n=1\}$ uma partição qualquer de $[0,1]$. Devido à densidade de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ em $\mathbb{R}$, segue que, em cada subintervalo $[t_{i-1},t_i]$ da partição P, teremos

$$M_i = \sup_{[t_{i-1},t_i]} f(x) = 1 \quad \text{e} \quad m_i=\inf_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x) = 0.$$

Disso, segue que

$$S(f;P) = \sum_{i=1}^n \underbrace{M_i}_{=1}(t_i-t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (t_i-t_{i-1}) =$$

(*) UM CONJUNTO $X\subset\mathbb{R}$ É DENSO EM $\mathbb{R}$ SE, $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$, $\exists\, a\in X$ TAL QUE $x<a<y$. $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ SÃO DENSOS EM $\mathbb{R}$, POR EXEMPLO.

$\Leftarrow$ $\cancel{t_1} - t_0 + \cancel{t_2} - \cancel{t_1} + t_3 - \cancel{t_2} + \cdots + t_n - \cancel{t_{n-1}}$

$= t_n - t_0 = 1 - 0 = 1.$

$\Rightarrow S(f; P) = 1, \quad \forall P$ partição de $[0,1]$.

Em particular para $\underbrace{\inf_{P \text{ part.}} S(f;P)}_{\displaystyle \overline{\int_0^1} f} = 1,$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{\int_0^1} f = 1}$$

Idem,

$s(f;P) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{m_i}_{=0} (t_i - t_{i-1}) = 0, \ \forall P$ partição de $[0,1]$.

Logo $\underbrace{\sup_{P \text{ é part.}} s(f;P)}_{\displaystyle \underline{\int_0^1} f} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\int_0^1} f = 0}$$

Assim, como

$$\int_{-0}^{1} f = 0 \neq 1 = \overline{\int_{0}^{1}} f,$$

segue que f não é integrável.

TEOREMA: (PROPRIEDADES DA INTEGRAL DEFINIDA).

Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções integráveis. Então, valem as propriedades:

(i) $f+g$ e $c \cdot f$ são integráveis $(c \in \mathbb{R})$;

e

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g \quad ;$$

$$\int_a^b c \cdot f = c \cdot \int_a^b f.$$

(ii) Se $f \geq 0$, então $\int_a^b f \geq 0$. Além disso, se $f \geq g$ então

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g.$$

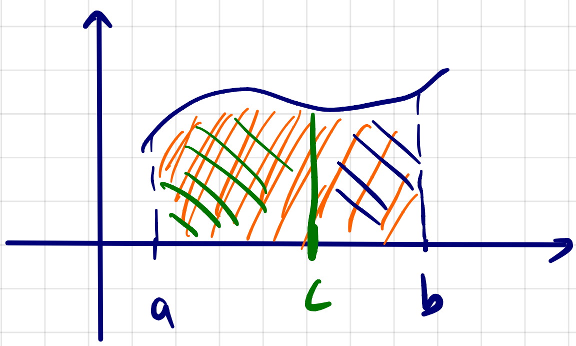
(iii) $$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$ Além disso, se f for limitada por $M>0$, então

$$\int_a^b |f| \le M.(b-a)$$

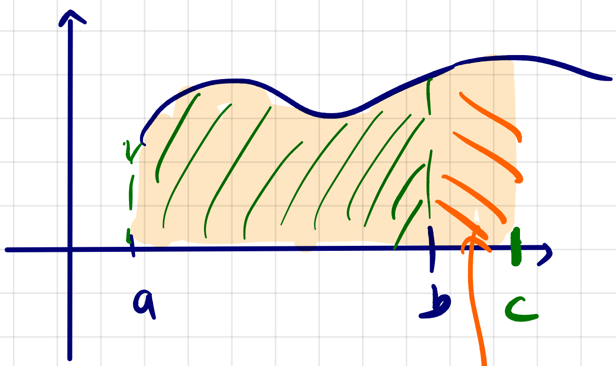
(iv) $$\int_a^b f = -\int_b^a f.$$

(v) $$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f, \quad c\in\mathbb{R}.$$

ILUSTRAÇÕES PARA JUSTIFICAR (v)



com c entre a e b.



$$\int_c^b f = -\int_b^c f$$

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>: Ele foge de um curso de cálculo, mas, mesmo assim, provaremos (ii) e (iii).

(ii) Seja P uma partição qualquer de $[a,b]$.

Como $f \geq 0$ em $[a,b]$ (i.e., $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$), então,

$$s(f; P) \geq 0, \quad \forall P \text{ partição de } [a,b].$$

Em particular, para o ínfimo das somas superiores, i.e.,

$$\overline{\int_a^b} f = \inf_{\substack{P \text{ é partição} \\ \text{de } [a,b]}} S(f,P) \geq 0$$

Como f é integrável, por hipótese segue que

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \geq 0 \Rightarrow \boxed{\int_a^b f \geq 0}$$

Sejam f, g tais que $f \geq g$.

Então, $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \geq g(x)$. $\quad (*)$

Define $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ por

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

Logo, $h(x) \geq 0$, por $(*)$

Pelo já mostrado, temos que

$$\int_a^b h \geq 0, \text{ i.e.,}$$

$$\int_a^b f - g \geq 0, \text{ o que, por (i):}$$

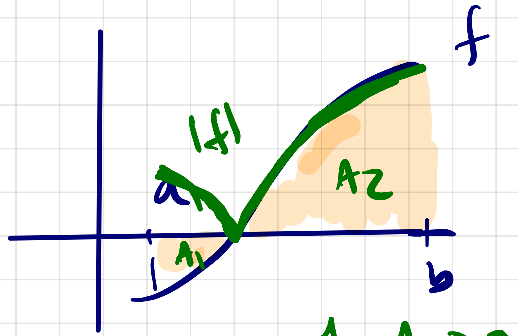
$$\int_a^b f + \underbrace{\int_a^b -g}_{c=-1} \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b f - \int_a^b g \geq 0 \quad \Rightarrow \int_a^b f \geq \int_a^b g.$$

Isso conduz à prova de (ii).

(iii) Primeiramente, mostremos que

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$



$A_1, A_2 > 0$

$$\left| \int_a^b f \right| = A_2 - A_1$$

$$\leq$$

$$\int_a^b |f| = A_2 + A_1$$

Note que, $\forall x \in [a,b]$

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

$$\underset{\text{por (ii)}}{\Rightarrow} \int_a^b -|f(x)| \leq \int_a^b f(x) \leq \int_a^b |f(x)|$$

$$\Rightarrow \underbrace{-\int_a^b |f|}_{-\alpha} \leq \underbrace{\int_a^b f}_{y} \leq \underbrace{\overbrace{\int_a^b |f|}^{\alpha}}_{>0}$$

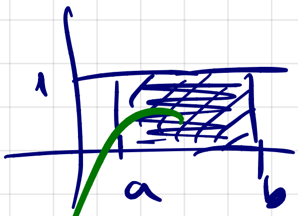
$$\Rightarrow \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

usamos: $-\alpha \leq y \leq \alpha \iff |y| \leq \alpha, \ \alpha > 0$

Além disso, se $\exists\, M>0$ tal que

$$|f(x)| \leq M, \ \forall x \in [a,b], \quad \text{então:}$$

$$\int_a^b |f| \leq \int_a^b M = M \cdot \underbrace{\int_a^b 1}_{b-a} = M.(b-a)$$



$$\int_a^b 1 = (b-a) \cdot 1$$

$\square$