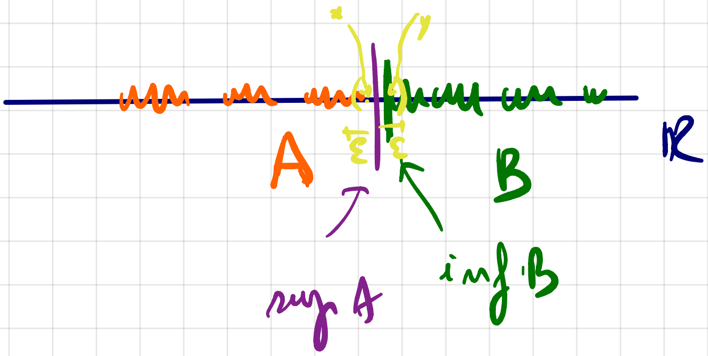
26/10/23 AULA 02

No final da aula passada vimos o resultado:

Se $A, B \subset \mathbb{R}$, tais que, $\forall x \in A$, $\forall y \in B$, $x \leq y$ Então, $\sup A \leq \inf B$. Além disso,

$$\sup A = \inf B \iff \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \exists y \in B \text{ tais que } y - x < \varepsilon.$$



No nosso caso de interesse, sendo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada, vamos tomar

$$A = \{s(f; P) : P \text{ é partição de } [a,b]\} \subset \mathbb{R}$$

$$B = \{S(f; P) : P \text{ é partição de } [a,b]\} \subset \mathbb{R}.$$

Então $s(f; P_1) \leq S(f; P_2)$, $\forall s(f; P_1) \in A$, $\forall S(f; P_2) \in B$. Disso, pelo exposto acima, concluímos que

$$\sup A \leq \inf B, \qquad \text{ou seja:}$$

$$\underbrace{\sup_{\substack{P \text{ é part.} \\ \text{de } [a,b]}} s(f;P)}_{= \underline{\int_a^b} f} \leq \underbrace{\inf_{\substack{P \text{ é part.} \\ \text{de } [a,b]}} S(f;P)}_{= \overline{\int_a^b} f}$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$$

Além disso, $\underbrace{\sup A}_{= \underline{\int_a^b} f} = \underbrace{\inf B}_{= \overline{\int_a^b} f} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists P_1, P_2$ partições de $[a,b]$ tais que $\underbrace{S(f;P_1)}_{y \in B} - \underbrace{s(f;P_2)}_{x \in A} < \varepsilon$

Ou seja,

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists P_1, P_2 \text{ partições de } [a,b] \text{ tais que } S(f;P_1) - s(f;P_2) < \varepsilon.$$

Def.: Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Dizemos que f é INTEGRÁVEL em $[a,b]$ se

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Este valor comum chama-se INTEGRAL DE f em $[a,b]$, e escrevemos

$$\int_a^b f \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(x)\,dx$$

LEMA: Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função limitada. Então, f é integrável se, e somente se, $\forall \varepsilon>0$, $\exists P$ partição de $[a,b]$, tal que

$$S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon.$$

DEMONSTR.:

$(\Rightarrow)$ Suponha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrável.

Então, $\forall \varepsilon>0$ dado, $\exists P_1, P_2$ partições tais que

$$S(f;P_1) - s(f;P_2) < \varepsilon. \qquad (*)$$

Seja $P = P_1 \cup P_2$. Como $P_1 \subset P$ e $P_2 \subset P$, então P é um refinamento para P_1 e para P_2.

Por um lema da aula passada, sabendo que ao refinar-se, as somas inferiores não diminuem e as superiores não aumentam, segue que:

$$s(f;P_1) \leq s(f;P), \qquad (I)$$

e

$$S(f;P) \leq S(f;P_2). \qquad (II)$$

De (*), temos: $S(f;P_2) - s(f;P_1) < \varepsilon$.

Fazendo (II) − (I), obtemos:

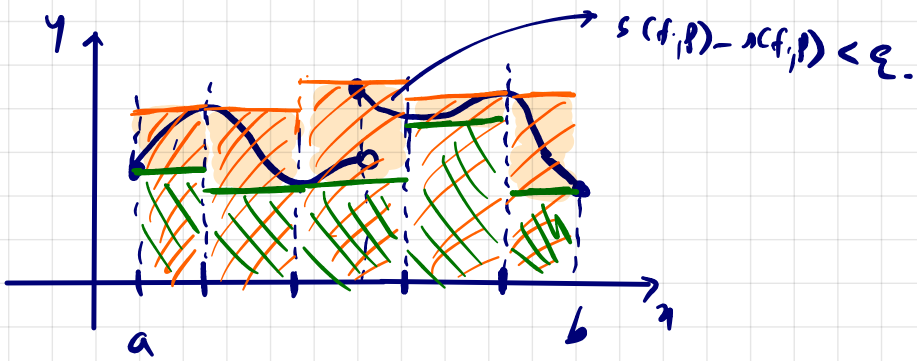
$$S(f;P) \leq S(f;P_2)$$

$$+ \quad -s(f;P) \leq -s(f;P_1)$$

$$S(f;P) - s(f;P) \leq S(f;P_2) - s(f;P_1) < \varepsilon$$

Ou seja, supondo f integrável, para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, obtemos P partição de $[a,b]$ tal que

$$S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon.$$



($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponha que, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P$ partição de $[a,b]$, tal que $S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon$.

A mostrar: f é integrável.

De fato, para $\varepsilon > 0$ dado, basta considerar $P_1 = P$ e $P_2 = P$. Assim,

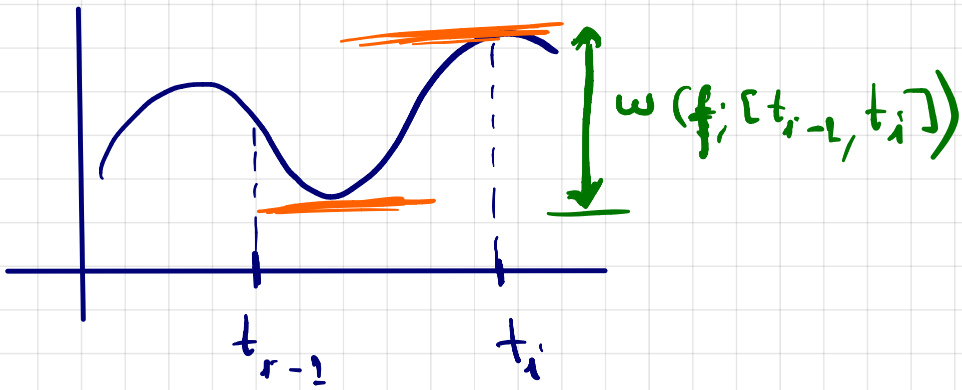
$$S(f;P_2) - s(f;P_1) < \varepsilon, \quad \text{i.e.,}$$

f é integrável em $[a,b]$.

$\square$

<u>Def.:</u> Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ uma partição do intervalo $[a,b]$. Definimos a OSCILAÇÃO de f em cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$, $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ por

$$\omega(f; [t_{i-1}, t_i]) = \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) - \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x)$$



Isto posto, podemos estabelecer o seguinte resultado, que será um importante critério de integrabilidade.

<u>TEOREMA:</u> (CRITÉRIO DE DARBOUX PARA INTEGRABILIDADE).

Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Então, são equivalentes as seguintes afirmações:

(i) f é integrável.

(ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P$ partição de $[a,b]$, tal que

$$S(f; P) - s(f; P) < \varepsilon.$$

(iii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P$ partição de $[a,b]$, tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f; [t_{i-1}, t_i]) \cdot (t_i - t_{i-1}) < \varepsilon.$$

DEMONSTR.: O lema anterior provou que (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

Resta mostrar que (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).

Isto ficará óbvio se observarmos que:

$$S(f;P) - s(f;P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i (t_i - t_{i-1})$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{n} M_i (t_i - t_{i-1}) - m_i (t_i - t_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(M_i - m_i)}_{\omega(f;[t_{i-1},t_i])} \cdot (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \omega(f;[t_{i-1},t_i]) \cdot (t_i - t_{i-1})$$

$\square$

(*) se $F(n)$ e $G(n)$ são duas expressões que dependem de $n \in \mathbb{N}$, então: $\sum_{n=1}^{k} [F(n) + G(n)] = \sum_{n=1}^{k} F(n) + \sum_{n=1}^{k} G(n)$

De facto:

$$\sum_{n=1}^{k} F(n) + G(n) = F(1) + G(1) + F(2) + G(2) + \dots + F(k) + G(k) =$$

$$= F(1) + F(2) + \dots + F(k) + G(1) + G(2) + \dots + G(k)$$

$$= \sum_{n=1}^{k} F(n) + \sum_{n=1}^{k} G(n)$$

No que segue, faremos alguns exemplos de cálculo de integral definida. Para isto, precisamos apresentar algumas igualdades importantes, cuja prova pode ser feita por indução matemática.

- $$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- $$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$