CÁLCULO 2: PROF. MAURÍCIO ZAHN.
wp.ufpel.edu.br/zahn

A INTEGRAL DEFINIDA – PRELIMINARES

Def.: Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto. Dizemos que o conjunto X é LIMITADO SUPERIORMENTE se $\exists\, A \in \mathbb{R}$ tal que

$$x \le A, \quad \forall x \in X$$

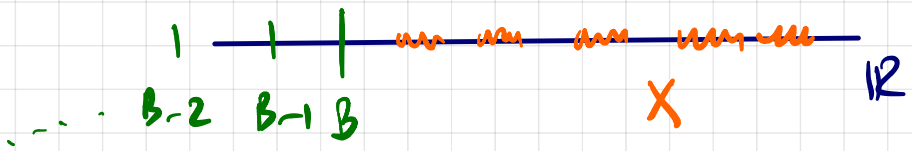
Neste caso, $A \in \mathbb{R}$ chama-se uma COTA SUPERIOR para o conj. X.

Note se X possui uma cota superior, então ele possuirá infinitas cotas superiores. Pois se A é cota superior para X, então $A+1$, $A+2$, $A+3$, ... também são cotas superiores para X.

Def.: Dizemos que $X \subset \mathbb{R}$ é limitado inferiormente se $\exists\, B \subset \mathbb{R}$ tal que $x \ge B$, $\forall x \in X$.

Neste caso, $B \in \mathbb{R}$ chama-se uma COTA INFERIOR para o conj. X.

Além disso, se X possui uma cota inferior, então ele possuirá infinitas.



$$\forall x \in X; \qquad x \ge B > B-1 > B-2 > B-3 \dots$$

Def: X será LIMITADO quando for limitado superior e inferiormente.

Def: Dado $X \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente. Diremos que $M \in \mathbb{R}$ é o <u>SUPREMO</u> do conj. X se ele for a menor das cotas superiores(*).

<u>NOTAÇÃO</u>: $M = \sup X$

Def: Dado $X \subset \mathbb{R}$ limitado inferiormente, Diremos que $m \in \mathbb{R}$ é o <u>ÍNFIMO</u> do conj. X se ele for a maior das cotas inferiores.

<u>NOTAÇÃO</u>: $m = \inf. X$.

<u>ILUSTRAÇÃO</u>: O conj. $X = [0, 1)$ é limitado.

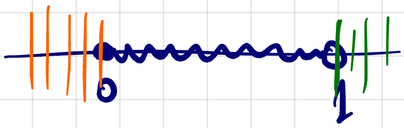
$\min X = 0$

$\max X = ?$

(não existe elemento MÁXIMO)

$\inf. X = 0$

$\sup X = 1$



(*) <u>Obs:</u> Em $\mathbb{R}$ todo conj. lim. superiormente vai ter supremo. No entanto, se estivéssemos no UNIVERSO dos racionais isso poderia ser falso.

Def: Dizemos que uma função $f: X \to \mathbb{R}$ é LIMITADA se $\exists\, M>0$ tal que $|f(x)| \le M$, $\forall x \in X$.

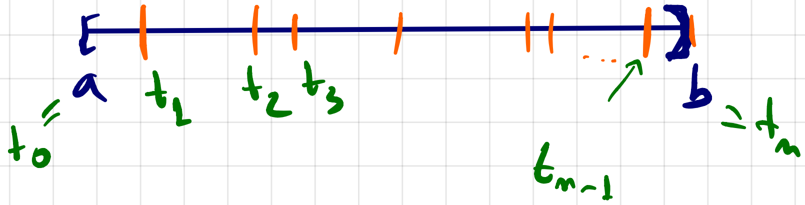
(equivalentemente, f é limitada se $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \le f(x) \le b$, $\forall x \in X$.)

$$|f(x)| \le M \iff -M \le f(x) \le M$$

Def: Dado um intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$, chama-se PARTIÇÃO do intervalo $[a,b]$ o conj. de pontos

$$P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b\},$$

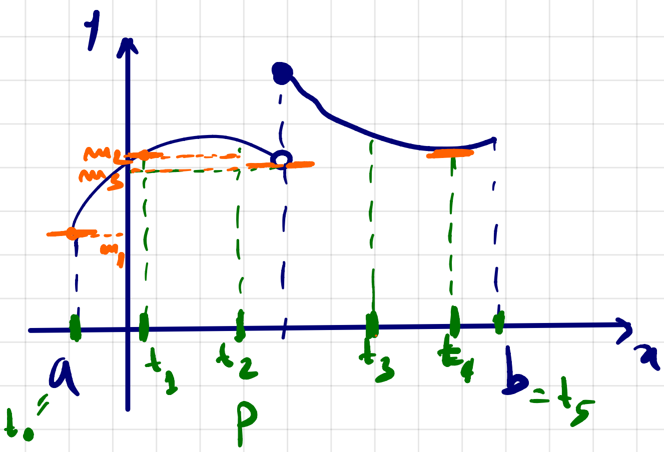
que divide o intervalo $[a,b]$ em subintervalos da forma $[t_{i-1}, t_i]$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

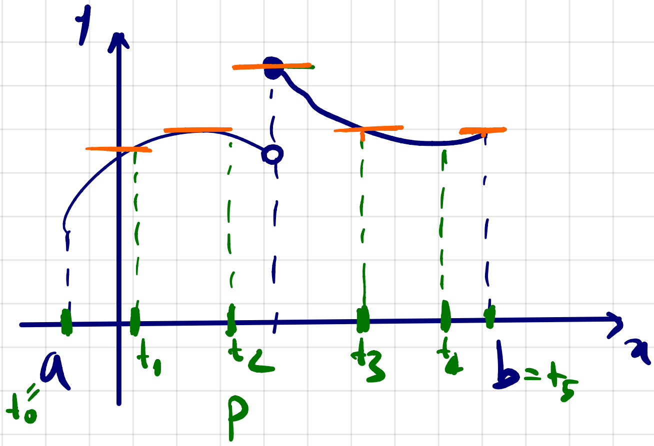


Def: Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Seja $P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b\}$ uma partição de $[a,b]$.

Definimos o ínfimo e o supremo de f em cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ da partição P, respectivamente, por:

$$m_i = \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) \quad ; \quad M_i = \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x)$$





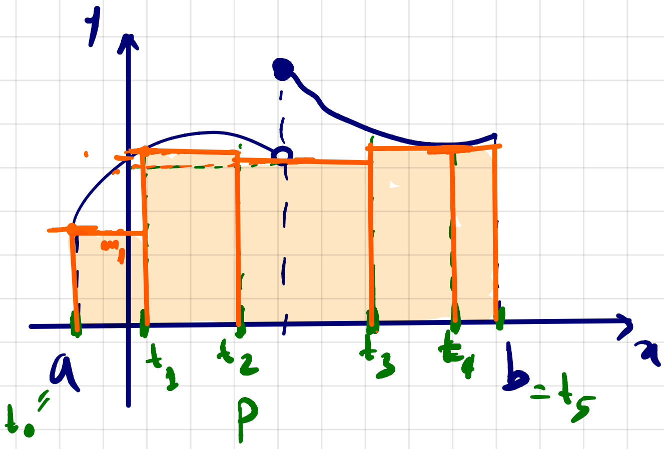
Isto posto, definimos as somas inferior e superior de f por:

Def.: Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada, $P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b\}$ uma partição do intervalo $[a, b]$. Definimos as somas superior e inferior de f em $[a, b]$ respectivamente, por:

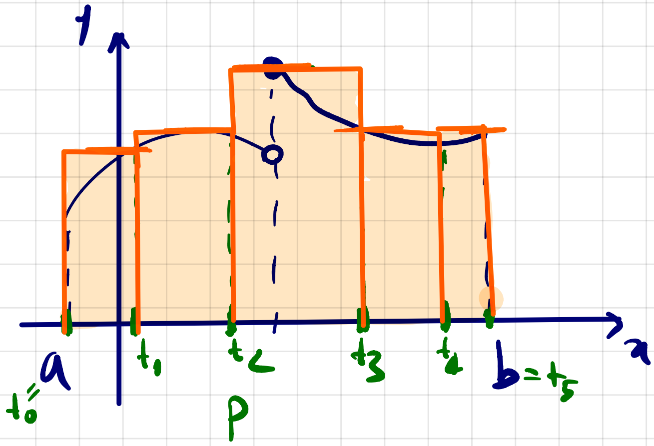
$$S(f; P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \underbrace{(t_i - t_{i-1})}_{\Delta t_i} \; ; \quad e$$

$$s(f; P) = \sum_{i=1}^{n} m_i (t_i - t_{i-1})$$

Se $f \geq 0$ em $[a, b]$, então a soma superior de f em $[a, b]$ vai representar uma aproximação, por excesso, da área abaixo do gráfico de f no intervalo $[a, b]$, e a soma inferior de f representará uma aproximação por falta da área abaixo do gráfico de f em $[a, b]$.



$s(f;P)$



$S(f;P)$

LEMA 1: Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada e P uma partição de $[a,b]$. Então, $s(f;P) \leq S(f;P)$.

Demonstração: De fato, dada $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ uma partição de $[a,b]$, então,

$$m_i \leq M_i \quad , \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Como $t_i - t_{i-1} = \Delta t_i > 0$, então

$$m_i (t_i - t_{i-1}) \leq M_i (t_i - t_{i-1}), \; \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

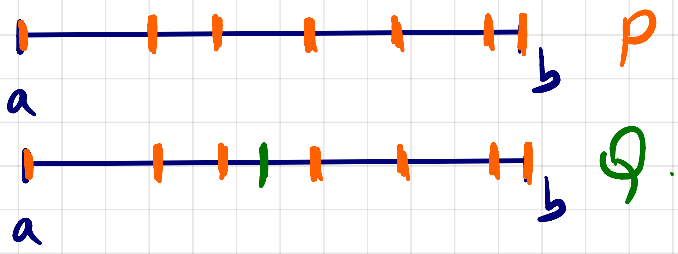
Somando sobre todos os índices, obtemos:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i (t_i - t_{i-1})}_{s(f;P)} \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} M_i (t_i - t_{i-1})}_{S(f;P)}$$

$$\Rightarrow s(f;P) \leq S(f;P)$$

$\square$

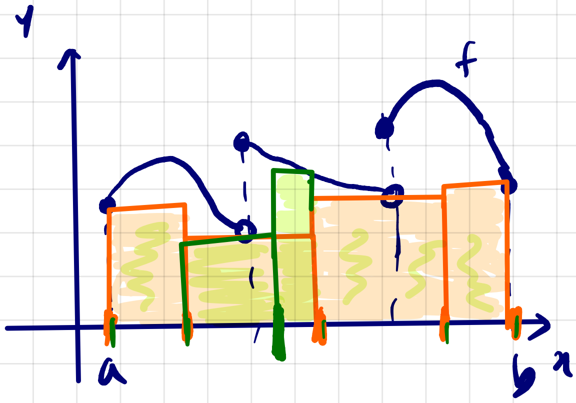
Def.: Sejam P, Q partições de um intervalo $[a,b]$. Dizemos que Q é um <u>refinamento</u> de P se $P \subset Q$.
Neste caso, dizemos que Q é mais fina do que P.



LEMA 2: Sejam $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e P, Q duas partições de $[a,b]$ com $P \subset Q$ (i.e., Q é um refinamento de P). Então:

$$s(f;P) \leq s(f;Q) \leq S(f;Q) \leq S(f;P)$$

Ou seja, ao efetuar um refinamento, a soma inferior não diminui e a soma superior não aumenta.



$P \subset Q$

$s(f;P) \leq s(f;Q)$

LEMA 03: Sejam $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada e P, Q duas partições quaisquer de $[a,b]$. Então:

$$s(f;P) \leq S(f;Q)$$

Ou seja, qualquer soma inferior é sempre menor ou igual do que qualquer soma superior.

DEMONSTR.: Basta considerar $P \cup Q$, que será um refinamento para P e para Q, pois

$$P \subset P \cup Q \quad e \quad Q \subset P \cup Q.$$

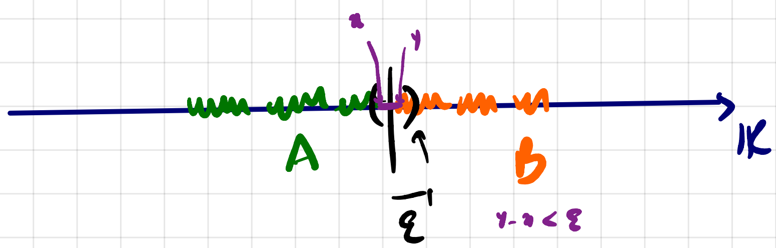
Pelo lema anterior segue que:

$$s(f;P) \leq s(f;P \cup Q) \leq S(f;P \cup Q) \leq S(f;Q)$$

$\square$

De um resultado da Análise temos:

Dados dois conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$ tais que, $\forall x \in A$, $\forall y \in B$, $x \leq y$. Então, $\sup A \leq \inf B$. Além disso, $\sup A = \inf B$ se, e só se, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$, $\exists y \in B$ tais que $y - x < \varepsilon$.



Sejam $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função limitada e considere $\Lambda = \{P : P$ é partição $[a,b]\}$.

Vamos definir as integrais inferior e superior de f em $[a,b]$ por:

$$\underline{\int_a^b} f := \sup_{P\in\Lambda} s(f;P) .$$

e

$$\overline{\int_a^b} f := \inf_{P\in\Lambda} S(f;P) .$$