CÁLCULO 1. $\boxed{31/10/23 \text{ – AULA 03}}$

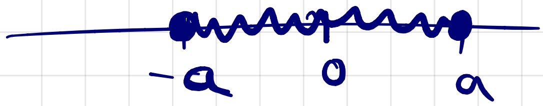
Outro exemplo de inequação:

LISTA 01; QUESTÃO 02-g:

$$\left|\frac{2-x}{3x-1}\right| \le \frac{2}{3}$$

SOLUÇÃO: Lembre da propriedade de módulo estudada na aula passada:

$$|y| \le a \iff -a \le y \le a$$



Disso, temos:

$$\left|\frac{2-x}{3x-1}\right| \le \frac{2}{3} \iff \underbrace{-\frac{2}{3} \le \frac{2-x}{3x-1}}_{(II)} \overbrace{\le \frac{2}{3}}^{(I)}$$

Iremos resolver as desigualdades (I) e (II), e no final tomar a interseção das soluções:

$$(I): \quad \frac{2-x}{3x-1} \le \frac{2}{3} \iff \frac{2-x}{3x-1} - \frac{2}{3} \le 0$$

$$\frac{3\cdot(2-x) - 2\cdot(3x-1)}{(3x-1)\cdot 3} \le 0$$

$$\frac{6-3x-6x+2}{3\cdot(3x-1)} \le 0 \iff \frac{8-9x}{3(3x-1)} \le 0$$

Vamos estudar o sinal de $\dfrac{8-9x}{3(3x-1)} \le 0$:

NUMERADOR:

$$8-9x=0$$
$$-9x=-8$$
$$x=\frac{8}{9}$$

x		$\frac{8}{9}$	
	$+++$		$--$

- $\forall x < \frac{8}{9} \overset{\times 9}{\Rightarrow} 9x < 8$
  $9x-8<0$
  $8-9x>0$
- $\forall x > \frac{8}{9} \overset{\times 9}{\Rightarrow} 9x>8$
  $\Rightarrow 9x-8>0 \;\; {\times(-1)}$
  $8-9x<0$

DENOMINADOR $(\neq 0)$

$$3(3x-1)=0 \Leftrightarrow 3x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$$

x		$\frac{1}{3}$	
	$---$	o	$+++$

- $\forall x < \frac{1}{3} \overset{\times 3}{\Rightarrow} 3x<1$
  $3x-1<0$
  $3\cdot(3x-1)<0$
- $\forall x > \frac{1}{3} \rightarrow 3x>1 \Rightarrow$
  $3x-1>0$
  $3\cdot(3x-1)>0$

x		$\frac{1}{3}$		$\frac{8}{9}$	
	$++$		$+++$		$----$
	$---$	o	$++$		$++$
$(\div)$	$--$	o	$++$	•	$-----$

→ SINAL DO QUOCIENTE $\dfrac{8-9x}{3(3x-1)}$ ≤ 0

S_1

(II): $-\frac{2}{3} \leq \frac{2-x}{3x-1} \Leftrightarrow \frac{2-x}{3x-1} + \frac{2}{3} \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{3.(2-x) + 2.(3x-1)}{3.(3x-1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{6-3x+6x-2}{3(3x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4+3x}{3(3x-1)} \geq 0$$

SINAL DO NUMERADOR:

$4-3x=0 \Leftrightarrow 3x=4 \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$

$+ + + \quad \frac{4}{3} \quad - - - - -$

$\forall x < \frac{4}{3} \; (\times 3) \Rightarrow 3x < 4$

$\Rightarrow 3x - 4 < 0$

$\Rightarrow -3x + 4 > 0 \quad (-1)$

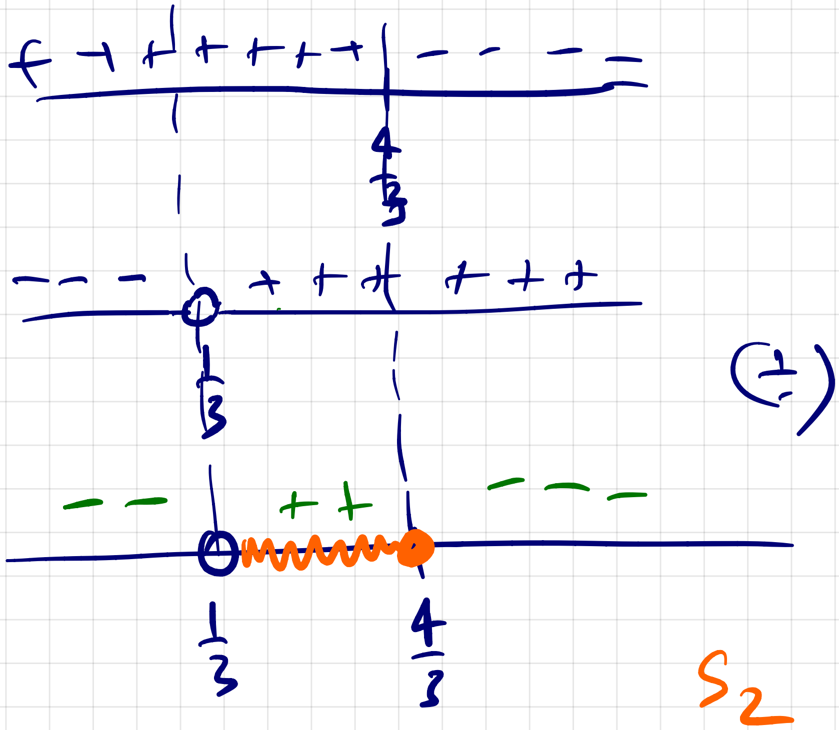
$\forall x > \frac{4}{3} \Rightarrow 3x > 4$

$\Rightarrow 4 - 3x < 0$

SINAL DO DENOMINADOR: $(\neq 0)$

↳ é o mesmo do caso (I)

$- - - \quad \frac{1}{3} \quad + + +$



S_2

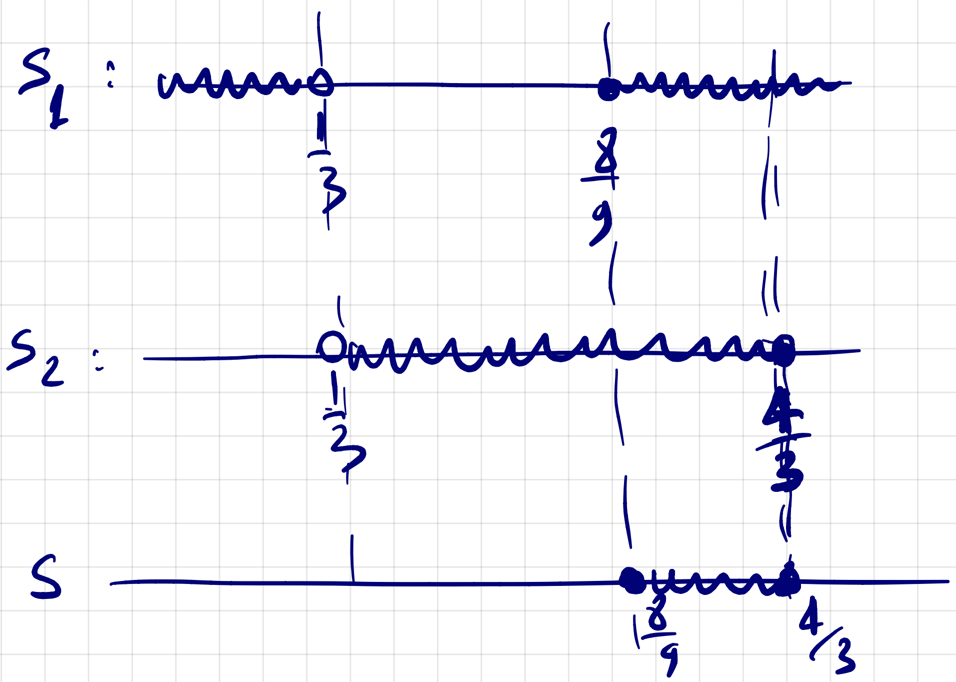
SINAL DO QUOCIENTE

$$\frac{4+3x}{3(3x-1)} \geq 0$$

Por fim, a solução S será dada por

$$S = S_1 \cap S_2$$

INTERSEÇÃO POIS AO ABRIR A DEF. DE MÓDULO, OBTEMOS DUAS INEQUAÇÕES, E OS VALORES DE x <u>DEVEM</u> SATISFAZER AMBAS, POR ISSO UMA INTERSEÇÃO.



$$\frac{8}{9} < \frac{4}{3} + \frac{3}{3}$$

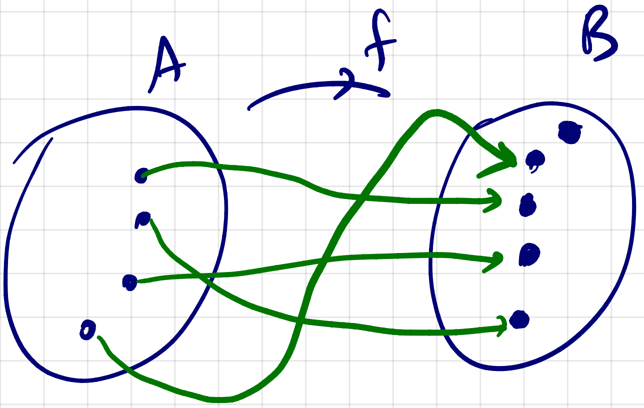
$$= \left[\frac{8}{9}, \frac{4}{3}\right]$$

FUNÇÕES:

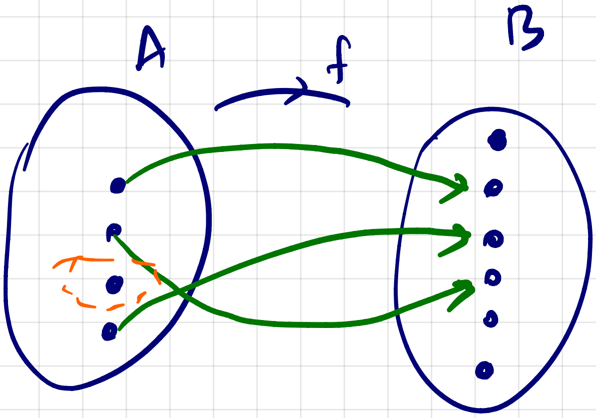
Def: Sejam A, B dois conjuntos não-vazios em $\mathbb{R}$.

Chama-se FUNÇÃO de A em B toda regra $f: A \to B$ tal que manda TODOS os elementos de A para elementos de B, de forma ÚNICA.

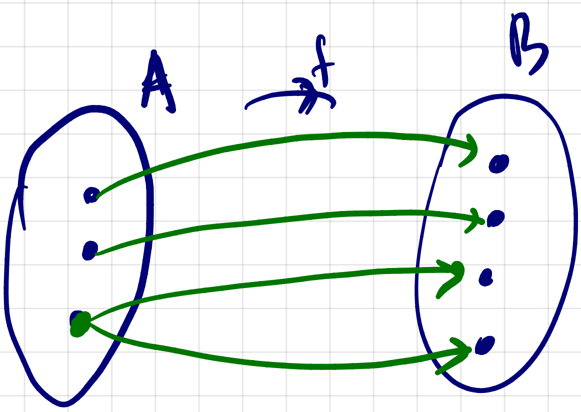
Ex:



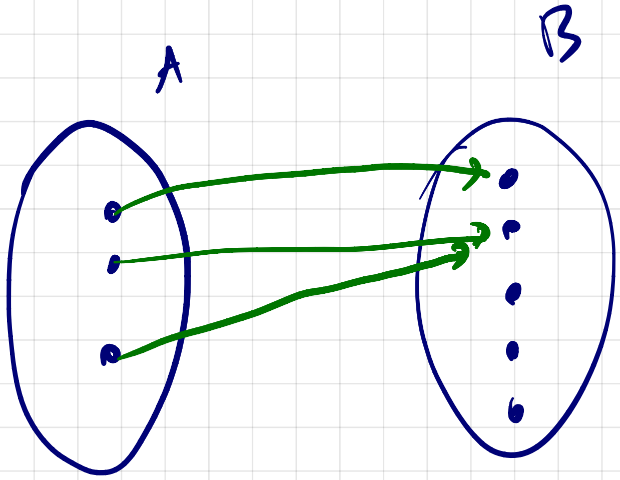
$f: A \to B$



f: não é função de A em B pois há um elemento de A que não é enviado a nenhum elemento de via f.



f não é função de A em B pois há um $x \in A$ que é enviado para mais de um elem. de B.

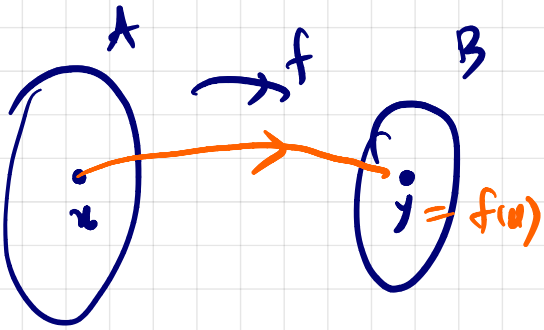


$f: A \to B$ é uma função

Dado $f: A \to B$

$x \longmapsto y := f(x)$; x chama-se VARIÁVEL INDEPENDENTE

$y = f(x)$ chama-se VARIÁVEL DEPENDENTE

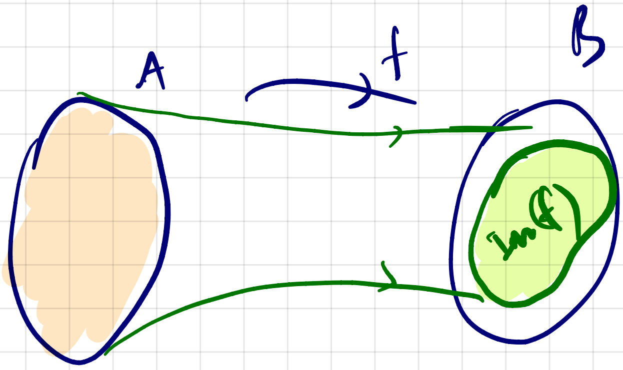


A chama-se DOMÍNIO de f

B chama-se CONTRA-DOMÍNIO de f.

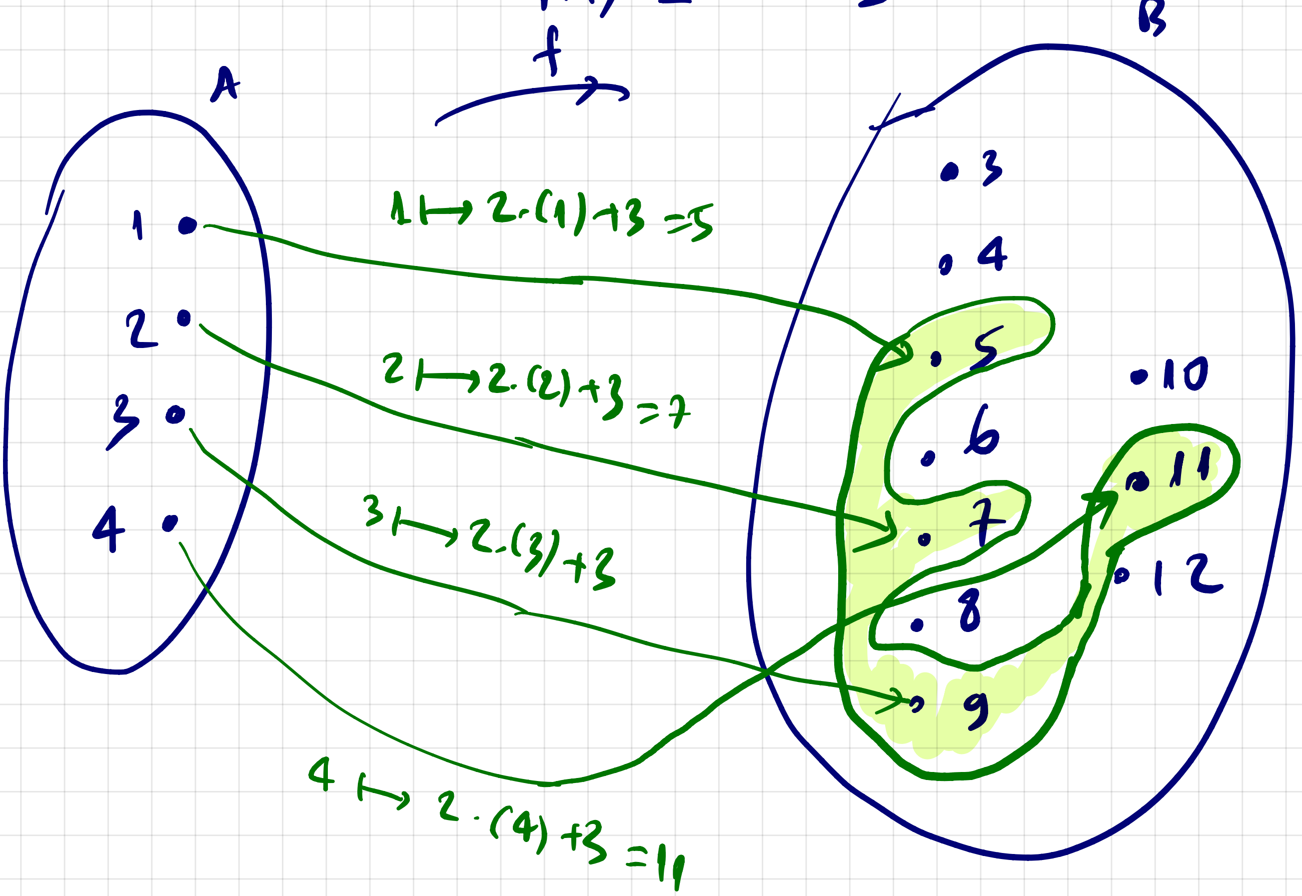
O conjunto $f(A) \subset B$, de todos os elementos de B que associam-se a elementos de A via f chama-se IMAGEM de f, e também podemos escrever

$$f(A) = Im(f).$$



Ex.: $f: \overset{A}{\{1,2,3,4\}} \xrightarrow{f} \overset{B}{\{3,4,5,\ldots,12\}}$,

$$f(x) = 2x+3$$



$$\Rightarrow \quad Im(f) = \{5, 7, 9, 11\} \subset B$$

Obs.: Não confunda os símbolos f e $f(x)$.

f denota a função, no caso de A e B, i.e., a regra que manda, unicamente, elementos de A para elementos de B. enquanto que $f(x)$ denota a imagem de $x \in A$ no conjunto B, mediante a função f.

Def.: Duas funções $f, g: A \to B$ são ditas iguais se $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A$.

Ex.: a) $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$

$g: [0,1] \to \mathbb{R}$; $g(x) = |x|$

Como, $\forall x \in [0,1]$; $|x| = x$,

então, $f(x) = g(x)$.

b) $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$; $f(x) = x$

$g: [-1,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$

Neste caso, se $x < 0$;

$f(x) = x$, mas $g(x) = |x| = -x$

Logo, $f \neq g$.

DOMÍNIO MÁXIMO Toda vez que dissermos, seja f a função $f(x) = [\text{uma expressão que a defina}]$, vamos assumir $f: A \to \mathbb{R}$, onde A é o domínio máximo em que a expressão que define f tenha sentido.

Vejamos alguns exemplos: obter o domínio de cada função a seguir:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

(b) $f(x) = \sqrt{2x-3}$

(d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-3x}{2x-4}}$

(c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2-3x}}{x^2-1} - \dfrac{4x}{\sqrt{x}}$

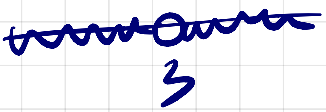
<u>solução:</u>

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$;

condição de existência :

$x-3 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 3.$



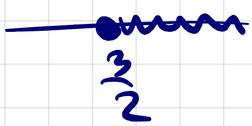
$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

(b) $f(x) = \sqrt{2x-3}$

condição de existência:

$2x-3 \geq 0$

$2x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{3}{2}$



$D(f) = [\tfrac{3}{2}, +\infty)$

(c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2-3x}}{x^2-1} - \dfrac{4x}{\sqrt{x}}$

condições de existência: [depois vamos ter que tomar a interseção, pois <u>todas</u> devem ser satisfeitas]

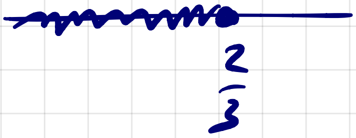
$(\bullet)$ $2-3x \geq 0$

$(\bullet\bullet)$ $x^2-1 \neq 0$

$(\bullet\bullet\bullet)$ $x > 0$

(•): $2-3x \geq 0 \Leftrightarrow -3x \geq -2$

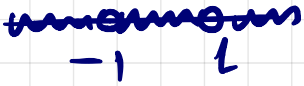
$\Leftrightarrow \boxed{x \leq \frac{2}{3}}$



D_1

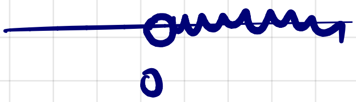
(••) $x^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1$

$\Leftrightarrow x \neq \pm 1$



D_2

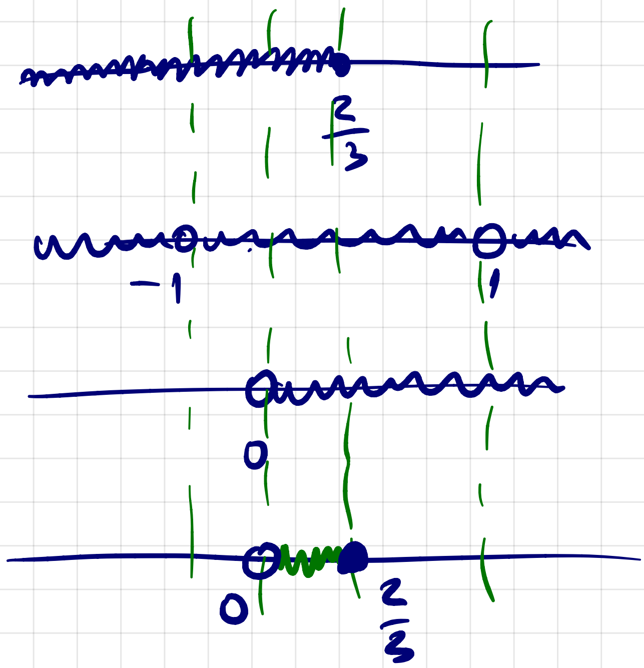
(•••) $x > 0$



D_3

$D = D_1 \cap D_2 \cap D_3$:

D:



$D(f) = \left(0, \frac{2}{3}\right]$

(d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-3x}{2x-4}}$

condição de existência:

$$\frac{1-3x}{2x-4} \geq 0$$

obs: Para funções, $\sqrt{\frac{f}{g}} \neq \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{g}}$, pois $\sqrt{\frac{f}{g}}$ tem sentido só $f, g < 0$ mas separadamente não

Agora, basta estudar o sinal do numerador, o sinal do denominador, e verificar qual intervalo o quociente fica ≥ 0. Fica como exercício.

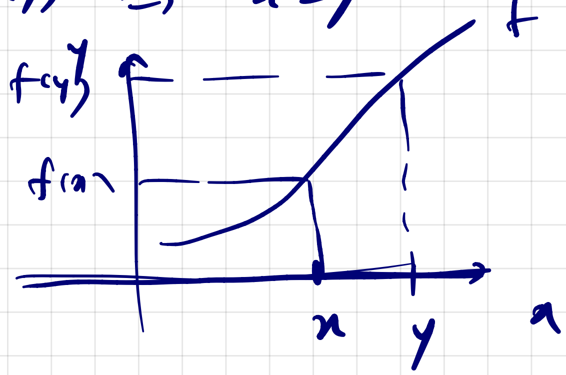
INJETIVIDADE, SOBREJETIVIDADE E BIJETIVIDADE:

Def.: Seja $f: A \to B$ uma função. Dizemos que f é **injetiva** se, e somente se, domínios diferentes possuírem imagens diferentes, ou seja, se, e só se,

$$\forall x, y \in A, \quad x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

Ou, de forma transpositiva,

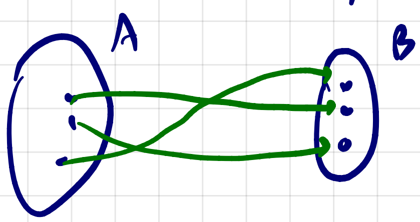
$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$



Def.: Dizemos que $f: A \to B$ é sobrejetiva se, e só se, todo o conj. B é sobreposto pelo conjunto A mediante f. Ou seja, se, e só se,

$$CD(f) = Im(f), \quad \text{i.e.,}$$

$$\forall y \in B, \ \exists x \in A \text{ tal que } f(x) = y$$

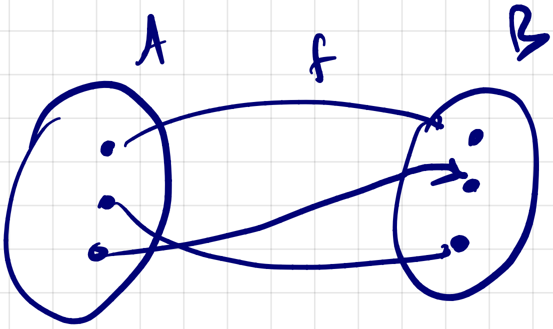


i.e., Todo elemento de B é imagem de algum elemento de A.

Def.: Dizemos que $f: A \to B$ é bijetiva quando for injetiva e sobrejetiva, ou seja se, e só se,

$$\forall y \in B, \ \exists! \, x \in A \text{ tal que } f(x) = y$$

Obs.: $\exists!$ SIGNIFIFICA EXISTE UM ÚNICO.



f É INJETIVA POIS DOMÍNIOS DIFERENTES POSSUEM IMAGENS DIFERENTES.

f TAMBÉM É SOBREJETIVA POIS TODOS ELEMENTOS DE B SÃO IMAGEM DE ALGUM ELEMENTO DE A.

LOGO, f É BIJETIVA.