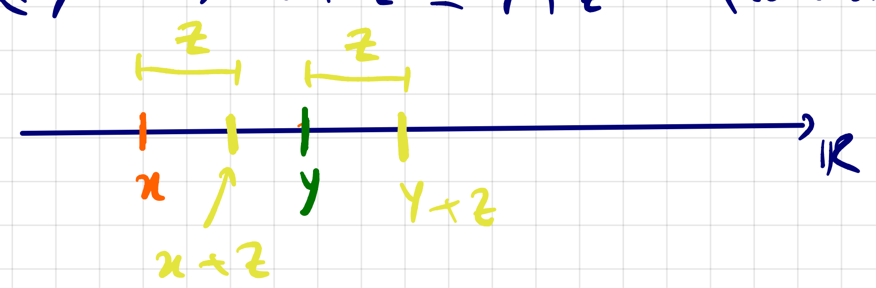
CÁLCULO 1.

26/10/23 – AULA 02

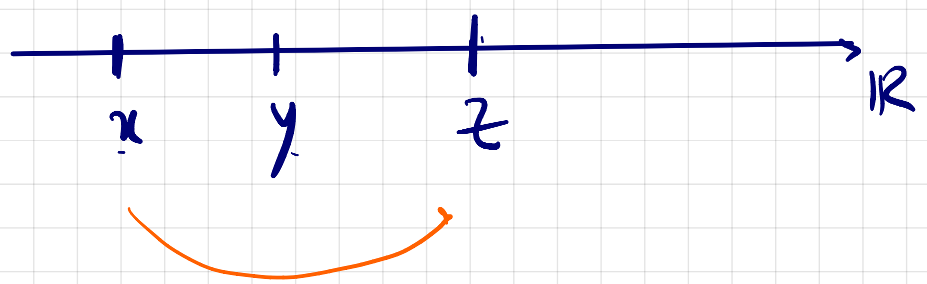
wp.ufpel.edu.br/zahn

Seguindo o conteúdo da aula anterior, onde, dentre vários assuntos, vimos a relação de ordem em $\mathbb{R}$, i.e., dados $x, y \in \mathbb{R}$, dizemos que
$x \leq y$ se, e somente se, $\exists\, m \geq 0$ tal que $x + m = y$.
Isto ajudou a introduzir o conceito de intervalo.
A relação "$\leq$" cumpre algumas propriedades:

(a) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ (MONOTONICIDADE DA ADIÇÃO)



(b) $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (TRANSITIVIDADE)



(c) $x \leq y$; $z > 0 \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$

De fato, se $x \leq y$, então, $\exists\, m \geq 0$ tal que
$$x + m = y \qquad (*)$$

Como $z>0$, então, multiplicando (*) por $z>0$, obtemos:

$$(x+m)\cdot z = y\cdot z.$$

Pela distributividade, vem:

$$x\cdot z + \underbrace{m\cdot z}_{\substack{\geq 0,\text{ pois} \\ m\geq 0 \text{ e } z>0}} = y\cdot z, \quad \text{ou seja,} \quad x\cdot z \leq y\cdot z$$

(d) $x\leq y$ e $z<0 \Rightarrow x\cdot z \geq y\cdot z$

Como $x\leq y$ então $\exists\, m\geq 0$ tal que

$$x+m=y$$

Como $z<0$, então $-z>0$ ($-z$ é o simétrico de z)

Então,

$$(x+m)\cdot(-z) = y\cdot(-z)$$

$$x\cdot(-z) + \underbrace{\underbrace{m}_{\geq 0}\cdot\underbrace{(-z)}_{>0}}_{\geq 0} = y\cdot(-z)$$

$$\Rightarrow x\cdot(-z) \leq y\cdot(-z), \quad \text{ou seja,}$$

$$-x\cdot z \leq -y\cdot z$$

Somar yz: (i.e., usar o item (a))

$$-x\cdot z + yz \leq -yz + y\cdot z = 0$$

$$\Rightarrow \quad -x\cdot z + y\cdot z \leq 0$$

Somando $x\cdot z$:

$$x.z + (-xz + y.z) \leq \underbrace{x.z + 0}_{xz}$$

Por associatividade, vem:

$$\underbrace{\left(x.z + (-x.z)\right)}_{= 0} + y.z \leq x.z$$

$$yz \leq xz \quad , \text{ i.e.,}$$

$$x\cdot z \geq yz.$$

Frente a estas propriedades e ainda, de posse do conceito de intervalo, podemos resolver problemas como o seguinte:

EXERCÍCIO: Encontrar os valores de $x \in \mathbb{R}$, se existirem, tais que

(a) $2x - 3 \leq x + 5$

(b) $\dfrac{1}{4x+3} > 2$

(c) $\dfrac{x}{1-2x} \leq \dfrac{1}{x+1}$

d) $-1 \leq 4x - 5 \leq 2$

SOLUÇÃO:

(a) $2x - 3 \leq x + 5 \quad (-x)$

$$2x - x - 3 \leq \cancel{x} + 5 - \cancel{x}$$

$x-3 \leq 5 \quad (+3)$

$x-\cancel{3}+\cancel{3} \leq 5+3$

$\boxed{x \leq 8}$

$S=\{x \in \mathbb{R}: x \leq 8\}$

ou

8

ou

$(-\infty, 8]$

(b) $\dfrac{1}{4x-3} > 2$

~~cuidado~~! É tentador pensar em resolver este problema multiplicando em CRUZ:

$$\frac{1}{4x-3} > \frac{2}{1}$$

$$1 \cdot 1 > 2 \cdot (4x-3)$$

Porém, neste caso, isto é ERRADO, pois pode ser que $4x-3$ seja negativo e, neste caso c.f. visto na propriedade (d) acima, a desigualdade deveria mudar.

como fazer nestes casos?

$\Downarrow$

para resolver este tipo de problema precisamos COMPARAR com zero, do seguinte modo:

$$\frac{1}{4x-3} > 2 \iff \frac{1}{4x-3} - \frac{2}{1} > 0$$

$$\frac{1-2\cdot(4x-3)}{4x-3} > 0$$

$$\frac{1-8x+6}{4x-3} > 0$$

$$\frac{7-8x}{4x-3} \boxed{> 0}$$

. Nesta etapa vamos precisar examinar os sinais do numerador e do denominador e efetuar uma DIVISÃO DE SINAIS, para então tomar o intervalo, se existir, onde o sinal da divisão entre numerador e denominador resultar em > 0

- sinal do numerador:

o que o torna $= 0$?

$$7-8x=0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{8}$$

$+++$ $\quad \frac{7}{8} \quad$ $---$

$\forall x < \frac{7}{8} \Rightarrow$

$8x < 7$

$\Rightarrow 7-8x > 0$

$\forall x > \frac{7}{8} \Rightarrow$

$8x > 7 \Rightarrow 7-8x < 0$

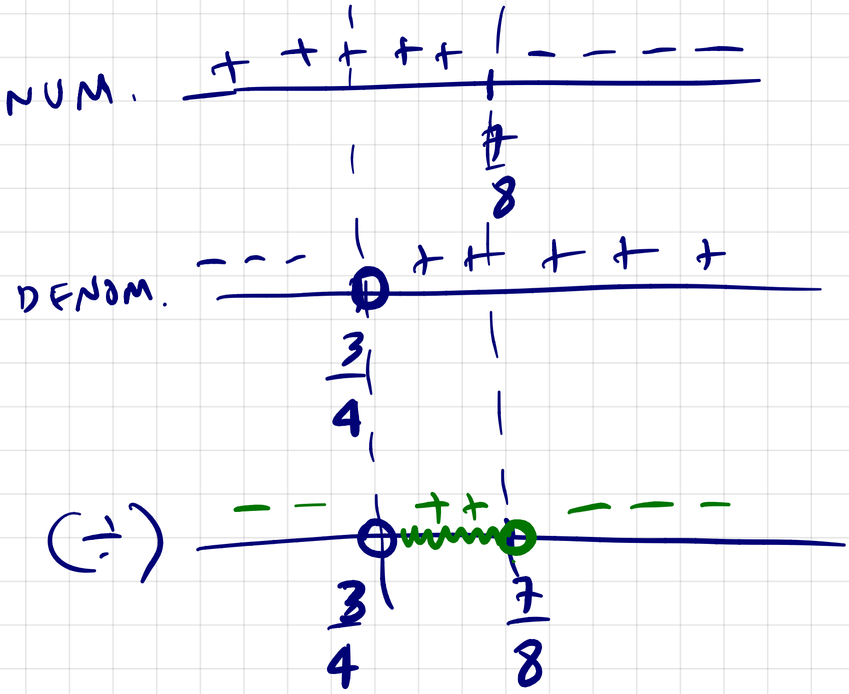
- sinal do denominador:

o que o torna $= 0$? $(\neq 0)$

$$4x-3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{3}{4}} \qquad \left(x \neq \frac{3}{4}\right)$$

$---$ $\quad \frac{3}{4} \quad$ $+++$

- $\forall x < \frac{3}{4} \Rightarrow 4x < 3 \Rightarrow 4x-3 < 0$
- $\forall x > \frac{3}{4} \Rightarrow 4x > 3 \Rightarrow 4x-3 > 0$



$\frac{3 \times 2}{4 \times 2} \quad \frac{7}{8}$

$\to$ sinal $\left(\frac{7-8x}{4x-3}\right) > 0$

SOLUÇÃO: $x \in \left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right)$

MÓDULO OU VALOR ABSOLUTO DE UM NÚMERO REAL:

Def.: Definimos o módulo de $x \in \mathbb{R}$ por

$$|x| = \text{máx.}\{x, -x\}.$$

Ex.: $|8| = \text{máx}\{8, -8\} = 8$

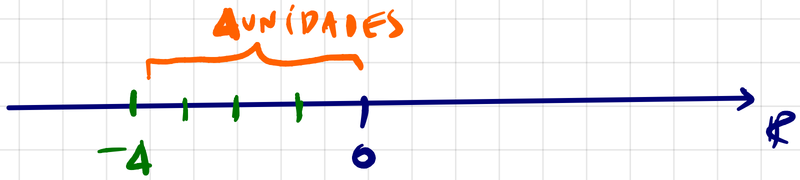
$|-3| = \text{máx.}\{-3, -(-3)\} =$

$= \text{máx}\{-3, 3\} = 3$

Uma outra forma de definir $|x|$ é:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Geometricamente, $|x|$ é a distância de x à origem.



$$|-4| = 4$$

Note que, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

Propriedades:

(01) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

(02) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

(03) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (desigualdade triangular)

De fato,

$$\begin{array}{rl} & -|x| \leq x \leq |x| \\ + & -|y| \leq y \leq |y| \\ \hline & -|x| - |y| \leq x+y \leq |x| + |y| \end{array}$$

$$-(|x| + |y|) \leq x+y \leq |x| + |y| \quad (*)$$

Para seguir na justificativa, precisamos provar o seguinte resultado:

PROPOSIÇÃO: Seja $x \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, com $a > 0$. Então:

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$$

DEMONSTRAÇÃO:

$$|x| \le a \iff \text{máx.}\{x,-x\} \le a \iff$$

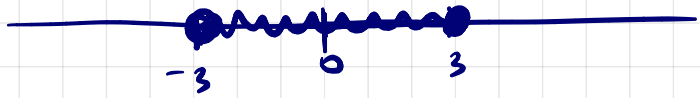
$$\iff x \le a \;\text{ e }\; -x \le a \quad (-1)$$

$$\iff x \le a \;\underline{\underline{\text{e}}}\; x \ge -a$$

$$\iff -a \le x \le a.$$

□

Ex.: $|x| \le 3 \iff -3 \le x \le 3$



Frente a esta proposição, podemos seguir na justificativa da desigualdade triangular.

Continuando de (*), temos:

$$-(|x|+|y|) \le x+y \le |x|+|y|,$$

com $|x|+|y| := a \ge 0$, ou seja,

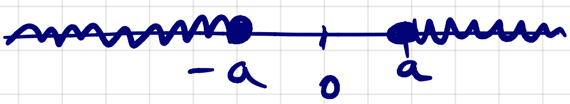
$$|x+y| \le a, \quad \text{i.e.,}$$

$$|x+y| \le |x|+|y|$$

□

PROPOSIÇÃO: Seja $x \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, com $a > 0$. Então

$$|x| \ge a \iff x \ge a \text{ ou } x \le -a$$



Obs.: $|x-b| < a$, $a > 0$; $b \in \mathbb{R}$ fixo.

$$-a < x-b < a \qquad +b$$

$$+b - a < x - \cancel{b} + \cancel{b} < a + b$$

$$-a + b < x < a + b$$

Ex.: $|x-1| < 2 \iff -2 < x-1 < 2 \quad (+1)$

$$-2+1 < x \cancel{-1} + \cancel{1} < 2+1$$

$$-1 < x < 3$$