CÁLCULO 1. PROF. DR. MAURÍCIO ZAHN.

CONJUNTOS: Não definimos conjunto. Assumimos simplesmente como sendo uma coleção de objetos.

Normalmente usamos letras maiúsculas do nosso alfabeto para representar conjuntos. e letras minúsculas para representar seus elementos.

Por exemplo: A o conj. das vogais do nosso alfabeto:

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

Para relacionar elementos e conjunto, usamos o símbolo de pertinência $\in$, e para relacionar conjunto usamos o símbolo de continência $\subset$.

Ex.: $A = \{$ meses do ano $\}$.

janeiro $\in A$; alface $\notin A$.

Def.: Dizemos que $A \subset B$ se, e só se todo elemento de A for um elemento do conj. B. Simbolicamente, escrevemos:

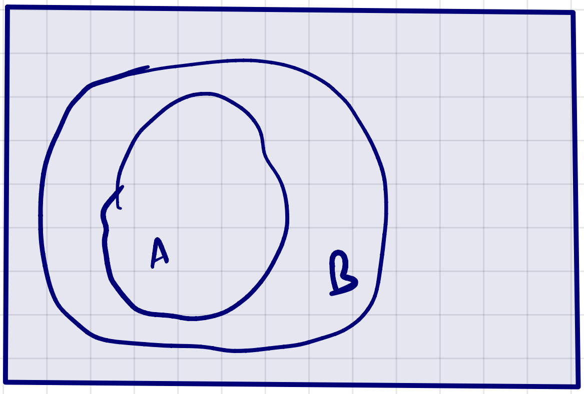
$$A \subset B \iff \forall x \in A \Rightarrow x \in B.$$

- $\iff$: SE, E SOMENTE SE (SÍMBOLO DE BICONDICIONAL)
- $\Rightarrow$: SE, ENTÃO. (SÍMBOLO DE IMPLICAÇÃO)
- $\forall$: PARA TODO OU QUALQUER (QUANTIFICADOR UNIVERSAL)
- $\exists$: EXISTE (QUANTIFICADOR EXISTENCIAL)

$A \subset B \iff \forall x \in A \Rightarrow x \in B$.

(PARA TODO $x \in A$, implica que $x \in B$)

Em diagrama (chamado de DIAGRAMA DE VENN), temos:



$A \subset B$

Quando $A \not\subset B$?

$A \not\subset B$ se existir pelo menos um elemento de A que não for elemento de B.

Simbolicamente:

$$A \not\subset B \iff \exists\, x \in A \text{ tal que } x \notin B.$$

O conjunto vazio é o conjunto que não possui elementos.

<u>NOTAÇÃO</u>: $\emptyset$ ou $\{\ \}$.

<u>PROPOSIÇÃO</u>: O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>: Seja A um conjunto qualquer em um universo. Vamos mostrar que $\emptyset \subset A$.

Por absurdo suponha que $\emptyset \not\subset A$

Logo, $\exists\, x \notin \emptyset$ tal que $x \notin A$, mas $x \notin \emptyset$ é absurdo, pois isto invalida o conceito de conjunto negão.

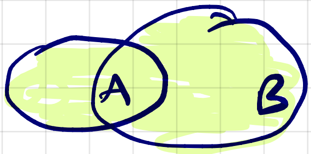
Portanto, $\emptyset \subset A$.

Pela arbitrariedade da escolha do conj. A, segue o resultado.

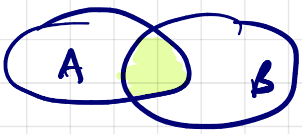
$\square$

OPERAÇÕES: Dados A, B conjuntos em um universo, definimos:

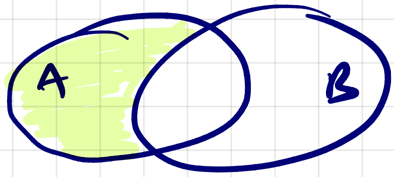
(i) $A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$, i.e., o conjunto dos elementos que pertencem a pelo menos um dos dois conjuntos.



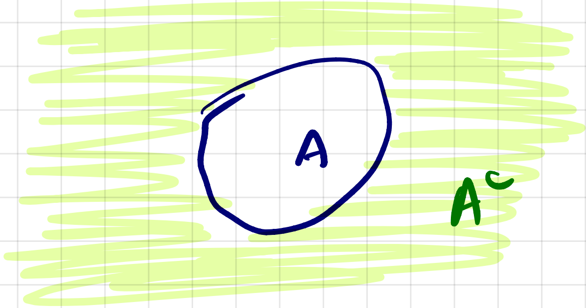
(ii) $A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$, i.e., o conjunto dos elementos comuns aos conjuntos A e B.



(iii) $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$



(iv) $A^c = \{x : x \notin A\}$ – complementar do conj.; i.e.; o conj. dos elementos que estão fora de A.



Lembrando do ensino básico, temos os conjuntos numéricos:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ – conj. dos números naturais

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ – conj. dos números inteiros.

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\right\}$ – conj. dos números racionais.

$\mathbb{I}$: conj dos números irracionais:

números cuja representação decimal é infinita e não-periódica.

Ex: $0{,}101001000100001\dots$ é irracional.

O conj. $\mathbb{Q}$ dos números racionais não é completo no sentido de que, por exemplo, não existe número racional cujo quadrado seja 2.

Ou seja $\nexists$ x tal que $x^2 = 2$.

Em outras palavras: $\sqrt{2}$ não é racional.

Por absurdo, suponha que $\sqrt{2}$ seja racional, então $\exists$ $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ tais que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad \text{com } mdc(p,q) = 1,$$

ou seja, $\frac{p}{q}$ está na forma irredutível (i.e., simplificada ao máximo — por ex. usaremos $\frac{2}{3}$ ao invés de $\frac{6}{9}$)

Elevando ao quadrado, vamos ter:

$$(\sqrt{2})^{\cancel{2}} = \left(\frac{p}{q}\right)^2$$

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2, \text{ i.e.,}$$

p^2 é par. Então, p é par. Logo, $\exists\, m \in \mathbb{Z}$ tal que $p = 2m$. Assim:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} = \frac{2m}{q}$$

$$(\sqrt{2})^{\cancel{2}} = \left(\frac{2m}{q}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{4m^2}{q^2}$$

$$\Rightarrow \cancel{2}q^2 = \cancel{4}m^2$$

$$\Rightarrow q^2 = 2m^2.$$

Logo, q^2 é par $\Rightarrow$ q é par. Logo, $\exists\, t \in \mathbb{N}$

tal que $q = 2t$

Assim $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q} = \dfrac{2m}{2t}$. Então,

$mdc(p, q) \geq 2$

Um absurdo!

(pois admitimos que $mdc(p, q) = 1$)

Portanto, $\sqrt{2}$ não é racional (é irracional)

Podemos aproximar $\sqrt{2}$, que é irracional, por uma sequência de números racionais, como segue:

$$\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} - 1 = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}}$$

$$= 1 + \frac{1}{\frac{1+\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2 - (1)^2}} = 1 + \frac{1}{\frac{1+\sqrt{2}}{1}} =$$

$$1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

Ou seja, obtemos:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1 + \cfrac{1}{1 + 1 + \cfrac{1}{1 + 1 + \cfrac{1}{1+ \dots}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}} ,$$

chama-se representação para $\sqrt{2}$ em fração contínua.

Efetuando TRUNCAMENTOS, obtemos as aproximações:

$\sqrt{2} \simeq 1$

$\sqrt{2} \simeq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

$$\sqrt{2} \simeq 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = 1 + \cfrac{1}{\frac{5}{2}} = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5} = 1{,}4$$

$$\sqrt{2} \simeq = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{5}{2}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \frac{2}{5}} = 1 + \cfrac{1}{\frac{12}{5}} =$$

$$= 1 + \frac{5}{12} = \frac{17}{12} = 1{,}41666\ldots$$

O corpo dos números reais é o completamento dos racionais, dado por $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, equipado com uma adição $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e um produto $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que cumpre as seguintes propriedades: $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$, tem-se:

A_1: $x + (y + z) = (x + y) + z$ (associatividade)

A_2: $x + y = y + x$ (comutatividade)

A_3: $\exists\, 0 \in \mathbb{R}$ tal que $x + 0 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (existência do neutro aditivo)

A_4: $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists\, -x \in \mathbb{R}$ tal que $x + (-x) = 0$ (existência do simétrico aditivo)

M_1: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (associatividade)

M_2: $x \cdot y = y \cdot x$ (comutatividade)

M_3: $\exists\, 1 \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot 1 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (1 é o neutro multiplicativo)

M_4: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\exists\, y \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot y = 1$. (existência do inverso multiplicat.)

A saber: $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$

PARA EVITAR DIVISÃO POR ZERO.

D_1: $x.(y+z) = x.y + x.z$ (distributividade)

D_2: $(x+y).z = x.z + y.z$ (distribut.)

Isso torna $\mathbb{R}$ um corpo.

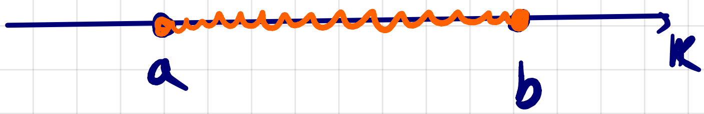
$\mathbb{R}$ é ordenado, ou seja, dados $x, y \in \mathbb{R}$, dizemos que $x \leq y$ se $\exists\, m \geq 0$ tal que

$$x + m = y$$

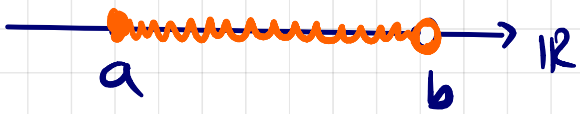
Sendo $\mathbb{R}$ ordenado, definimos conceito de intervalo:

<u>Def.</u>: Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, definimos:

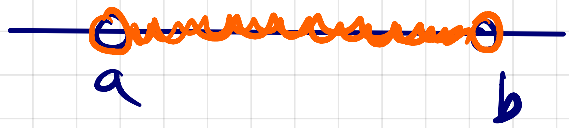
- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ - intervalo fechado



- $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ - intervalo misto

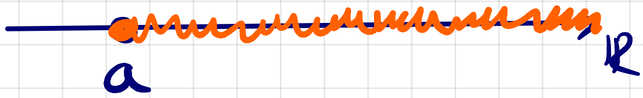


- $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ - intervalo aberto.



- $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ - intervalo misto.

- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ – intervalo ilimitado à direita

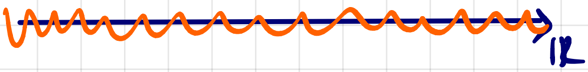


- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$.

- $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$ – intervalo ilimitado à esquerda

- $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

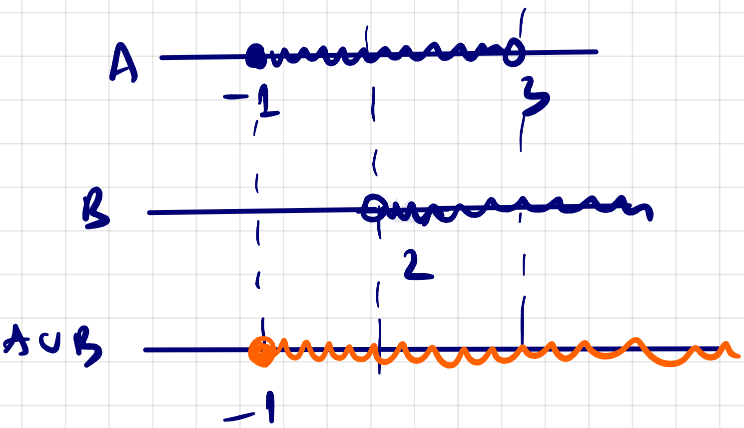
- $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.



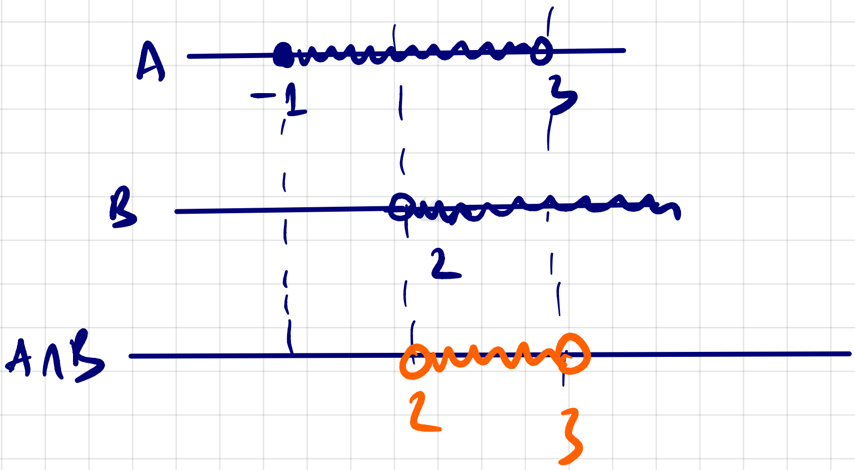
Exemplo: $A = [-1, 3)$; $B = (2, +\infty)$; obter:

$A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$; B^c.

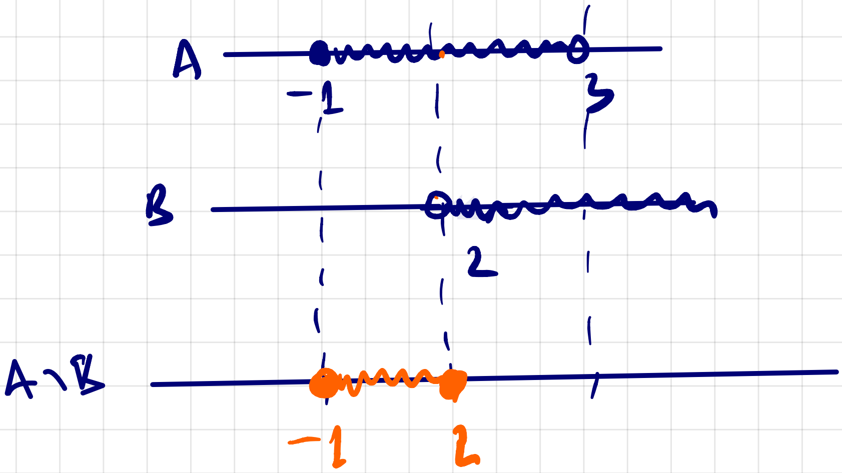
Solução:



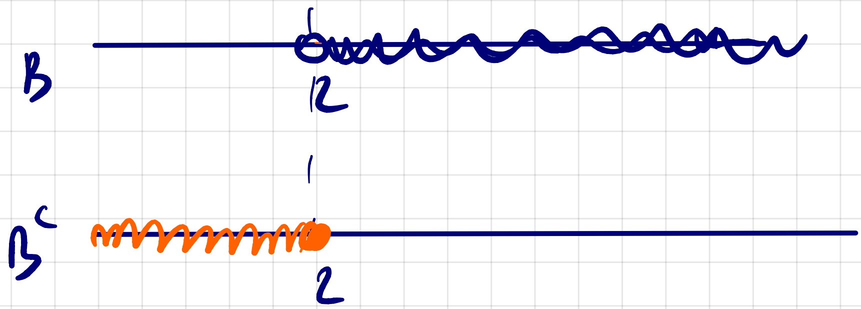
$A \cup B = [-1, +\infty)$



$\Rightarrow A \cap B = (2, 3)$



$A \setminus B = [-1, 2]$



$\Rightarrow B^c = (-\infty, 2]$.