CÁLCULO IV

25/10/23 - AULA 01

PROF. DR. MAURÍCIO ZAHN.

Neste semestre estudaremos o cálculo integral a várias variáveis e a teoria de campos vetoriais (funções $\vec{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$)

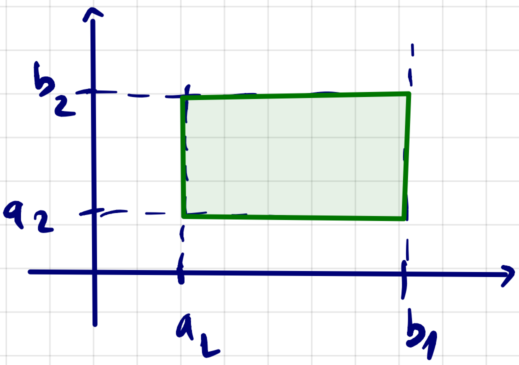
INTEGRAIS MÚLTIPLAS:

PRELIMINARES:

Def: Um bloco $A \subset \mathbb{R}^m$ é o conjunto definido por

$$A = \prod_{i=1}^{m} [a_i, b_i] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_m, b_m].$$

Ex: no $\mathbb{R}^2$: $A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$



ou seja em $\mathbb{R}^2$ um bloco é simplesmente um retângulo.
(em $\mathbb{R}$ um bloco será um intervalo e em $\mathbb{R}^3$ um bloco será um paralelepípedo)

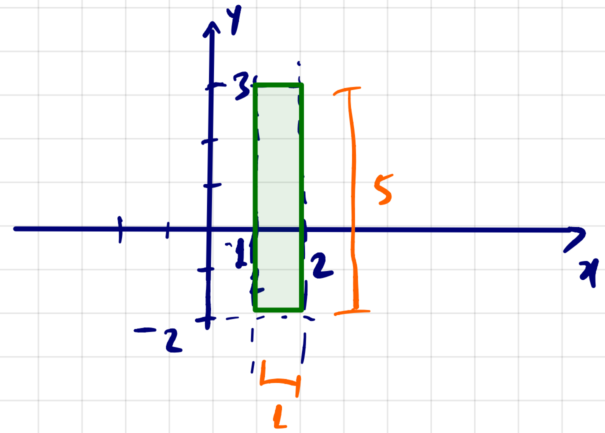
O volume de um bloco $A = \prod_{i=1}^{m} [a_i, b_i]$ é definido por

$$Vol(A) = \prod_{i=1}^{m} (b_i - a_i) = (b_1 - a_1)\cdot(b_2 - a_2)\cdots(b_m - a_m)$$

Obs.: Este conceito de volume de um bloco é geral, no sentido de que, por exemplo, em $\mathbb{R}^2$ $Vol(A)$ é a área do bloco A (área de um retângulo); já em $\mathbb{R}^3$, o vol(A) será o volume do paralelepípedo.

Ex.: $\mathbb{R}^2$: $A = [1,2] \times [-2,3]$

$$Vol(A) = (2-1)\cdot(3-(-2)) = 1 \cdot 5 = 5$$



Def. Chama-se <u>partição</u> de um bloco $A \subset \mathbb{R}^m$ o conjunto

$$P = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_m \text{, onde}$$

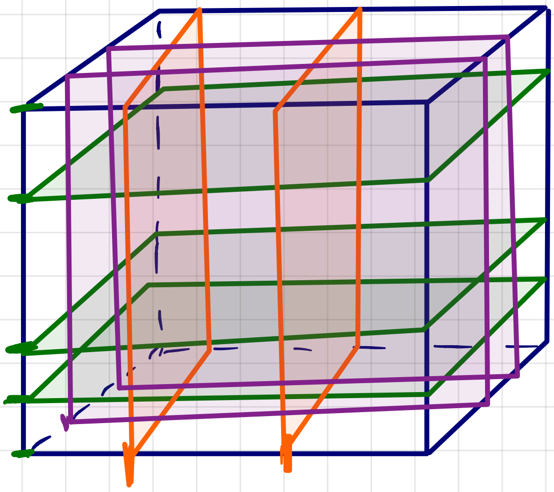
P_1 – partição do intervalo $[a_1, b_1]$

P_2 – partição do intervalo $[a_2, b_2]$

⋮

P_m – partição do intervalo $[a_m, b_m]$

ou seja a partição P é formada pela partição (subdivisão) de cada dimensão do bloco A.



A

Uma partição P de um bloco $A \subset \mathbb{R}^m$ divide o bloco A em sub-blocos $B \in P$. Obviamente, por construção, temos que

$$\mathrm{Vol}(A) = \sum_{B \in P} \mathrm{Vol}(B).$$

<u>Def.</u>: Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ um bloco. Dizemos que uma função $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definida no bloco A é LIMITADA no bloco A se $\exists\, M > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall\, x \in A; \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$$

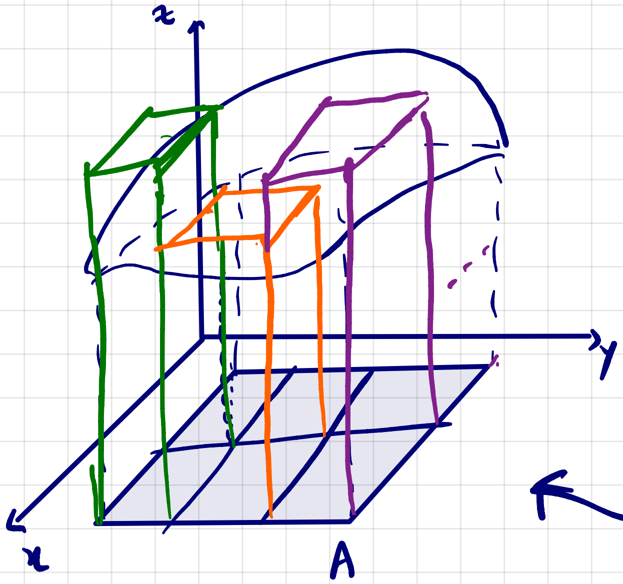
<u>Def.</u>: Seja $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função limitada no bloco $A \subset \mathbb{R}^m$ e seja P uma partição do bloco A.

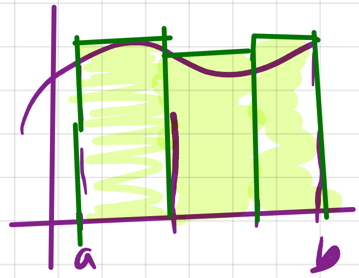
Definimos o ínfimo e o supremo de f em cada subbloco $B \in P$, respectivamente, por:

$$m_B = \inf_{x \in B} f(x) \quad \text{e} \quad M_B = \sup_{x \in B} f(x).$$

<u>Def.</u>: Sejam $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função limitada no bloco A e P uma partição do bloco A, determinando subblocos $B \in P$. Definimos as somas superior e inferior de f no bloco A, respectivamente, por:

$$S(f;P) = \sum_{B \in P} M_B \cdot \mathrm{Vol}(B) \quad \text{e} \quad s(f;P) = \sum_{B \in P} m_B \cdot \mathrm{Vol}(B).$$





EXEMPLOS DE SOMAS SUPERIORES, EM $\mathbb{R}^2$ e EM $\mathbb{R}$.

Se $f \geq 0$ e $A \subset \mathbb{R}^2$, então $S(f;P)$ é uma aproximação, por excesso, do volume do sólido abaixo do gráfico de f, sobre o bloco A, e $s(f;P)$ será uma aproximação, por falta, do referido volume.

PROPOSIÇÃO: Sejam $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função limitada no bloco A e P uma partição do bloco. Então:

$$s(f;P) \leq S(f;P).$$

DEMONSTR.: De fato, $\forall\, B \in P$ (i.e., B um sub-bloco qualquer da partição P do bloco A), temos que

$$m_B \leq M_B$$

Como $Vol(B) \geq 0$, $\forall\, B \in P$, então

$$m_B \cdot Vol(B) \leq M_B \cdot Vol(B).$$

Somando sobre todos os sub-blocos, obtemos:

$$\sum_{B\in P} m_B \cdot Vol(B) \leq \sum_{B \in P} M_B \cdot Vol(B) \quad ; \text{ i.e.,}$$

$$s(f;P) \leq S(f;P)$$

$\square$

<u>Def.</u>: Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ um bloco e P e Q partições de A.

Dizemos que Q é um REFINAMENTO da partição P se $Q \subset P$.

P $\qquad\qquad\qquad\qquad$ Q

Neste caso, dizemos que Q é mais fina do que P.

<u>PROPOSIÇÃO</u>: Sejam $A \subset \mathbb{R}^m$ um bloco, $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função limitada, P e Q partições de A, com $Q \subset P$, ou seja, Q refinamento de P. Então:

$$s(f;P) \leq s(f;Q) \leq S(f;Q) \leq S(f;P).$$

[ou seja, ao efetuar um refinamento, a soma inferior não diminui e a soma superior não aumenta, e seus valores vão se tornando mais próximos, à medida em que refinarmos cada vez mais a partição].

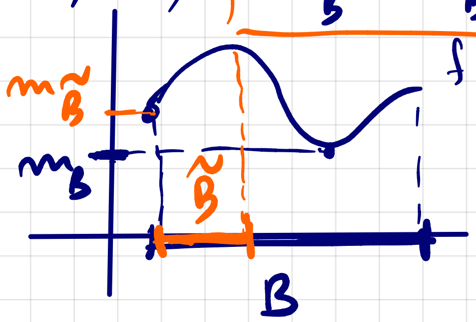
DEMONSTR.: Mostraremos que $s(f;P) \leq s(f;Q)$.

Sejam P e Q partições do bloco $A \subset \mathbb{R}^m$. Então P divide A em sub-blocos $B \in P$ e Q divide A em sub-blocos $\tilde{B} \in Q$. Note que:

$$\tilde{B} \subset B$$

(ISTO PODE SER VISUALIZADO NA ILUSTRAÇÃO DA PÁGINA ANTERIOR)

Além disso: $\inf B \leq \inf \tilde{B}$, i.e., $\boxed{m_B \leq m_{\tilde{B}}}$.



Também

$$Vol(B) = \sum_{\tilde{B} \in B} Vol(\tilde{B})$$

Disso, temos:

$$\underbrace{s(f;P)} = \sum_{B \in P} m_B \cdot Vol(B) = \sum_{B \in P} m_B \cdot \sum_{\tilde{B} \in B} Vol(\tilde{B}) =$$

$$= \sum_{B \in P} \sum_{\tilde{B} \in B} m_B \cdot Vol(\tilde{B}) \leq \sum_{B \in P} \sum_{\tilde{B} \in B} m_{\tilde{B}} \cdot Vol(\tilde{B}) =$$

$m_B \leq m_{\tilde{B}}$

$$= \sum_{\tilde{B} \in Q} m_{\tilde{B}} \cdot Vol(\tilde{B}) = \underbrace{s(f;Q)}.$$

$$\Rightarrow s(f;P) \leq s(f;Q)$$

Logo;

$$s(f;P) \leq s(f;Q) \leq S(f;Q) \leq S(f;P)$$

PROP. ANTERIOR

se faz análogo ao feito acima.

$\square$