Universidade Federal de Pelotas
Curso de Lic. em Matemática
Disciplina de Cálculo III
Lista 09 de Exercícios - Diferenciais. Regra da cadeia. Derivada direcional
Prof. Dr. Maurício Zahn

1. Nos itens a seguir, mostre que f é diferenciável em todos os pontos do seu domínio. Em seguida, obtenha a matriz Jacobiana $d_a f$ de cada uma delas.

   (a) $f(x,y) = x^2y - 2xy$ (b) $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2$

   (c) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$ (d) $f(x,y) = \dfrac{y}{x}$

2. De cada função vetorial a seguir, obtenha a matriz Jacobiana:

   (a) $f(x,y) = (e^{x^2+y^2}, 2x^2y + 3y^2, \sqrt{x^2+y^2})$
   (b) $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2, xyz, \cos xy, x^2 - yz)$

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y^2}{x^4+y^4}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$
Mostre que $\dfrac{\partial}{\partial x}f(0,0)$ e $\dfrac{\partial}{\partial y}f(0,0)$ existem, mas que f não é diferenciável na origem.

4. Uma *equação diferencial parcial* - EDP - é uma equação diferencial que envolve derivadas parciais de uma função de várias variáveis reais.A equação diferencial parcial do calor, dada por
$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$
modela a variação da temperatura à medida que o calor se espalha através de um objeto.
Mostre que $f(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$ satisfaz a equação do calor dada acima.

5. Calcule as diferenciais totais de cada função a seguir:

   (a) $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (b) $z = \ln(xy + y^2)$

   (c) $z = \arctan \dfrac{x+y}{1-xy}$ (d) $z = \dfrac{ye^x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

   (e) $z = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$ (f) $z = \dfrac{x \sin y}{\cos(xy)}$

6. Um recipiente fechado na forma de um sólido retangular deve ter um comprimento interno de 8m, uma largura interna de 5m, uma altura de 4m e uma espessura de 4cm. Use diferenciais para aproximar a quantidade de material necessário para construir o recipiente. (Resp.: 7,36 m^3)

7. Foram feitas medidas do raio da base e da altura de um cone circular reto e obtivemos 10 cm e 25 cm, respectivamente, com possível erro nessas medidas de, no máximo, 0,1 cm. Utilize a diferencial para estimar o erro máximo cometido no cálculo do volume do cone. (Resp.: 20π cm^3)

8. Utilize diferenciais para estimar a quantidade de estanho em uma lata cilíndrica fechada com 8cm de diâmetro e 12cm de altura, se a espessura da folha de estanho for de 0,04 cm. (Resp.: 16cm^3)

9. O comprimento e a largura de um retângulo foram medidos como 30 cm e 24cm, respectivamente, com um erro de medida de, no máximo, 0,1cm. Utilize diferenciais para estimar o erro máximo cometido no cálculo da área do retângulo.
(Resp.: 5,4cm^2)

10. Calcule cada derivada parcial indicada, usando a regra da cadeia.

    (a) $u = \ln xy + y^2$, onde $x = e^t$ e $y = e^{-t}$. Obter $\dfrac{\partial u}{\partial t}$.

    (b) $u = x^2yz$, onde $x = \dfrac{r}{s}$, $y = re^s$ e $z = re^{-s}$. Obter $\dfrac{\partial u}{\partial r}$, $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial t}$.

    (c) $u = \arcsin(3x + y)$, onde $x = r^2e^s$ e $y = \sin rs$. Obter $\dfrac{\partial u}{\partial r}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial s}$.

11. Se $u = f(x, y)$ é uma função diferenciável de x e y com $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\sin\theta$, mostre que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{\rho}$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{\rho}$$

12. Suponha que $u = f(x, y, z)$ seja diferenciável, onde $x = \rho\sin\phi\cos\theta$, $y = \rho\sin\phi\sin\theta$ e $z = \rho\cos\phi$. Calcule $\dfrac{\partial u}{\partial \rho}$, $\dfrac{\partial u}{\partial \phi}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial \theta}$ em termos das derivadas parciais em x, y e z.

13. Suponha que $f(x, y)$ seja uma função de $x = x(t, s)$ e $y = y(t, s)$. Mostre que

$$f_{tt} = f_{xx}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + 2f_{xy}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) + f_{yy}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + f_x\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + f_y\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

14. Usando a definição de derivada direcional, calcule a derivada direcional de cada função abaixo, na direção do vetor unitário $\overrightarrow{u}$ dado. Em seguida, use o teorema visto em aula para calcular a referida derivada.

    (a) $f(x, y) = 2x^2 + 5y^2$; $\overrightarrow{u} = \cos\frac{\pi}{4}\overrightarrow{i} + \sin\frac{\pi}{4}\overrightarrow{j}$

    (b) $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$; $\overrightarrow{u} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{i} - \dfrac{4}{5}\overrightarrow{j}$

15. De cada item a seguir, encontre o gradiente de f em P e a taxa de variação do valor da função na direção e sentido de $\overrightarrow{u}$ em P.

    (a) $f(x, y) = e^{2xy}$; $P(-2, 2)$; $\overrightarrow{u} = (\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3})$

    (b) $f(x, y, z) = 2x^3 + xy^2 + xz^2$; $P(1, 1, 1)$; $\overrightarrow{u} = \frac{\sqrt{21}}{7}\overrightarrow{j} - \frac{2\sqrt{7}}{7}\overrightarrow{k}$

16. Em cada item, obtenha a derivada direcional no ponto P, segundo a direção θ indicada.

    (a) $f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$, $P(2, 1)$, $\theta = 60^o$.

    (b) $f(x, y) = e^x\cos y$, $P(0, 0)$, $\theta = 60^o$.

(c) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$, $P(1,1)$, $\theta = 45^o$.

17. Calcule o módulo e a direção do gradiente do potencial $v(x,y) = \ln\sqrt{\dfrac{x^2+(y-2)^2}{x^2+(y+2)^2}}$ no ponto $P(2,0)$.

18. Seja $f(x,y) = x^2 - y^2$. Represente geometricamente $\nabla f(x_o, y_o)$, sendo

    (a) $(x_o, y_o) = (1,1)$. (b) $(x_o, y_o) = (-1,1)$. (c) $(x_o, y_o) = (-1,-1)$.

19. Seja $f(x,y) = \arctan\dfrac{x}{y}$. Represente geometricamente $\nabla f(x_o, y_o)$, sendo (x_o, y_o) um ponto da circunferência $x^2+y^2=1$.