Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Cálculo IV - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 06 de Exercícios - Teoremas de Green, da divergência e de Stokes no plano. Superfícies no $\mathbb{R}^3$

1. No estudo da Hidrodinâmica, se o campo vetorial de velocidades de um fluido tiver divergência nula, ele é chamado de *campo imcompressível*. Na teoria Eletromagnética, se um campo vetorial tiver divergência nula, ele é chamado de *campo solenoidal*.

   (a) Mostre que qualquer campo vetorial da forma
   $$\vec{F}(x,y,z) = f(y,z)\vec{i} + g(x,z)\vec{j} + h(x,y)\vec{k}$$
   é incompressível.

   (b) Seja $\vec{F}(x,y) = \dfrac{x}{(x^2+y^2)^\alpha}\vec{i} + \dfrac{y}{(x^2+y^2)^\alpha}\vec{j}$. Determine o valor de α para que o campo $\vec{F}$ seja soleinodal.

2. Um escoamento é representado pelo campo de velocidade $\vec{v} = (y^2+z^2)\vec{i} + xz\vec{j} + 2x^2y^2\vec{k}$. Verifique se o escoamento é:

   (a) incompressível.

   (b) irrotacional[1].

3. Seja $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Mostre que

   (a) $\nabla \cdot \vec{r} = 3$ (b) $\nabla \cdot (||\vec{r}||\vec{r}) = 4||\vec{r}||$ (c) $\nabla \times \vec{r} = \vec{0}$

4. Use o Teorema de Green para calcular $\oint_\gamma e^{x+y}dx + e^{x+y}dy$, onde γ é a circunferência $x^2+y^2 = 4$.

5. Usando o Teorema de Green para calcular a área de cada região dada

   (a) o círculo de raio 3, centrado na origem.

   (b) o triângulo ABC de vértices $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$.

   (c) a região entre o eixo x e a ciclóide parametrizada por $\gamma(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$, ao longo de $0 \leq t \leq 2\pi$.

   (d) a região entre o gráfico de $y = x^2$ e o eixo x ao longo de $0 \leq x \leq 2$.

6. Em cada item, verifique o Teorema da divergência no plano e o Teorema de Stokes no plano para $\vec{F}$ e Ω dados.

   (a) $\vec{F}(x,y) = 3x\vec{i} + 2y\vec{j}$, e Ω é a região limitada pela circunferência $x^+y^2 = 1$.

   (b) $\vec{F}(x,y) = (x^2, y^2)$, e Ω a região limitada pela elipse $4x^2 + 25y^2 = 100$.

7. Sejam u e v funções escalares possuindo derivadas parciais primeiras contínuas no domínio aberto e conexo Ω do plano xy. Seja γ uma curva suave fechada simples em Ω. Mostre que
   $$\oint_\gamma uv\,dx + uv\,dy = \iint_\Omega \left[v\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + u\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] dA.$$

[1]Um campo vetorial $\vec{F}$ é dito irrotacional se rot $\vec{F} = \vec{0}$.

8. Use o Teorema da Divergência para mostrar que, dado um campo escalar $g : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ com derivadas parciais contínuas até a segunda ordem no aberto Ω e γ uma curva suave fechada simples em Ω, então

$$\oint_\gamma g \frac{\partial g}{\partial \overrightarrow{n}} ds = \iint_\Omega (g\Delta g + ||\nabla g||^2) dA.$$

Obs.: a quantidade $\nabla g \cdot \overrightarrow{n} := \dfrac{\partial g}{\partial \overrightarrow{n}}$ aparece na integral de linha. A derivada direcional de g na direção do vetor normal $\overrightarrow{n}$ é chamada de *derivada normal* de g.

9. Use o Teorema de Green na forma vetorial para provar a *primeira identidade de Green*:

$$\iint_\Omega f\Delta g dA = \oint_\gamma f(\nabla g) \cdot \overrightarrow{n} ds - \iint_\Omega \nabla f \cdot \nabla g dA,$$

onde Ω e γ satisfazem as hipóteses do Teorema de Green e as derivadas parciais apropriadas de f e g existem e são contínuas.

10. Use a primeira identidade de Green do exercício anterior para provar a *segunda identidade de Green*:

$$\iint_\Omega (f\Delta g - g\Delta f) dA = \oint_\gamma (f\nabla g - g\nabla f) \cdot \overrightarrow{n} ds$$

onde Ω e γ satisfazem as hipóteses do Teorema de Green e as derivadas parciais apropriadas de f e g existem e são contínuas.

11. Desenhe a superfície que tem a equação paramétrica dada em cada caso, descrevendo sua equação cartesiana.

    (a) $\varphi(u, v) = (2 \operatorname{sen} u, 3 \cos u, v)$, $0 \leq v \leq 2$.
    (b) $\varphi(u, v) = (u, v, v^2 - u^2)$
    (c) $\varphi(u, v) = (v \cos u, v \operatorname{sen} u, \frac{1}{v^2})$, $0 \leq u \leq 2\pi$, $v > 0$.
    (d) $\varphi(u, v) = (u, \sqrt{4 - u^2 - v^2}, v)$

12. Determine uma representação parametrizada para o plano que passa pela origem e que contém os vetores $\vec{w_1} = (1, -1, 0)$ e $\vec{w_2} = (0, 1, -1)$.

13. Obtenha uma parametrização para a parte do cilindro $y^2 + z^2 = 16$ que se encontra entre os planos $x = 0$ e $x = 5$.

14. Ache uma parametrização para a parte do elipsóide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ que se encontra à esquerda do plano xz.

15. Determine a equação do plano tengente à superfície parametrizada dada no ponto indicado, em cada caso:

    (a) $x = u + v$, $y = 3u^3$, $z = u - v$; $P(2, 3, 0)$.
    (b) $\varphi(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, v)$; $u = 1$, $v = \frac{\pi}{3}$.