Fundação Universidade Federal de Pelotas
Departamento de Matemática e Estatística
Curso de Licenciatura em Matemática
Segunda Prova de Cálculo III[1]
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: GABARITO. **Data:** 27/09/2023

Questão 01. [Peso 1] Sabendo que $1 - \dfrac{x^2y^2}{3} < \dfrac{\arctan xy}{xy} < 1$, o que pode-se dizer sobre

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arctan xy}{xy} \text{ ? Justifique.}$$

Questão 02. Seja a função vetorial $\vec{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\vec{f}(t) = (2\,\text{sen}\,t,\, 2t,\, 2\cos t)$.

(a) [Peso 1] Obtenha um vetor tangente ao gráfico de $\vec{f}$ no ponto $P(2, \pi, 0)$. Obtenha também a equação da reta tangente ao gráfico de $\vec{f}$ no mesmo ponto P dado.

(b) [Peso 0,5] Calcule o comprimento do arco determinado pelo gráfico de $\vec{f}$, do ponto $P(2, \pi, 0)$ ao ponto $Q(0, 2\pi, -2)$.

Questão 03. Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x + \ln(x - y^2)$.

(a) [Peso 2] Determine o domínio Ω e faça o seu esboço. Em seguida, decida se Ω é um aberto de $\mathbb{R}^2$. Determine também o seu fecho e sua fronteira. A origem é um ponto interior de Ω? Justifique.

(b) [Peso 1] Calcule o diferencial total df e a derivada mista $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

(c) [Peso 1] Determine $\dfrac{\partial f}{\partial r}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial s}$, onde $x = r^2s^2$ e $y = 2rs$.

(d) [Peso 0,5] Determine a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}$, sendo $\vec{u} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Questão 04. Defina $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $\vec{F}(x, y) = \Big(\ln(xy - y^2),\, \sqrt{9 - x^2 - y^2},\Big)$.

(a) [Peso 3] Construa o esboço gráfico do domínio Ω de $\vec{F}$. O ponto $A(3, 0)$ é um ponto interior de Ω? Justifique. Esse mesmo ponto pertence ao fecho de Ω? Justifique. Decida se Ω é um compacto do $\mathbb{R}^2$. Esta função é contínua na origem? Justifique.

(b) [Peso 1] Obtenha a matriz Jacobiana $d_a\vec{F}$ de um ponto $a \in \text{int}(\Omega)$.

(c) [Peso 2] Dada uma função vetorial $\vec{F} : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\vec{F}(x_1, x_2, ..., x_m) = (F_1(x_1, ..., x_m), ..., F_m(x_1, ..., x_m))$, definimos o *divergente* de $\vec{F}$ por

$$\text{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + ... + \frac{\partial F_m}{\partial x_m}.$$

(i) Calcule div$\vec{F}$ da função dada no exercício.

(ii) Mostre que $\text{div}(\nabla f) = \Delta f$, onde $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função escalar possuindo as derivadas parciais contínuas até a segunda ordem.

[1]Obs.: A nota N desta Prova será definida por $N = \frac{\sum \text{Pesos} \times 10}{13}$.

Questão 05. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(a) [Peso 1] Prove que existem as derivadas parciais na origem, calculando-as.

(b) [Peso 0,5] Mostre que f não é contínua na origem.

(c) [Peso 0,5] Os itens (a) e (b) seriam contraditórios, comparando com o clássico resultado do Cálculo I, que diz: *"se f é derivável em um ponto, então f é contínua no mesmo"*? Justifique sua resposta.

Questão 06. [Peso 1] O raio de um cone circular reto está aumentando a uma taxa de 4,6 cm/s, enquanto a altura está decrescendo a uma taxa de 6,5 cm/s. Em qual taxa o volumedo cone está variandoquando o raio é 300 cm e a altura é 350 cm?

GABARITO:

01)

$$1-\frac{x^2y^2}{3} < \frac{\arctan xy}{xy} < 1$$

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 1-\frac{x^2y^2}{3} = 1$ e

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 1 = 1$, segue pelo T. do Sanduíche

1,0

que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arctan xy}{xy} = 1.$$

02) $\vec{f}(t) = (2\,\text{sen}\,t,\ 2t, 2\cos t)$

$x = 2\,\text{sen}\,t$
$y = 2t$
$z = 2\cos t$

$$P: \begin{cases} 2 = 2\,\text{sen}\,t \\ \pi = 2t \\ 0 = 2\cos t \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

0,2

(a) $\vec{f}'(t) = (2\cos t,\ 2,\ -2\,\text{sen}\,t)$ 0,3

Então, $\vec{f}'(\frac{\pi}{2})$ será o vetor tangente ao gráfico de $\vec{f}$ no ponto P. Ou seja:

0,2

$$\vec{f}'(\tfrac{\pi}{2}) = (2\cos\tfrac{\pi}{2},\ 2,\ -2\,\text{sen}\tfrac{\pi}{2}) = (0,\ 2,\ -2)$$

A reta (r) tangente ao gráfico de $\vec{f}$ em $P(2,\pi,0)$ terá $\vec{u} = \vec{f}'(\frac{\pi}{2}) = (0, 2, -2)$ como vetor diretor.

Assim:

1,0

$$(a): \begin{cases} x = x_p + at \\ y = y_p + bt \\ z = z_p + ct \end{cases} = \begin{cases} x = 2 \\ y = \pi + 2t \\ z = -2t \end{cases}$$

0,3

(b) $\ell = \int_{t_0}^{t_1} \|\vec{f}\,'(t)\| \, dt$; onde

t_0 é determinado por $P(2, \pi, 0)$, i.e., $t_0 = \frac{\pi}{2}$ e

t_1 é determinado por $Q(0, 2\pi, -2)$, i.e.,

$$\begin{cases} 2\cos t_1 = 0 \\ 2t_1 = 2\pi \\ 2\,\text{sen}\, t_1 = -2 \end{cases} \iff t_1 = \pi .$$

0,1

Além disso,

$$\|\vec{f}\,'(t)\| = \sqrt{(2\cos t)^2 + (2)^2 + (-2\,\text{sen}\, t)^2}$$

$$= \sqrt{4\cos^2 t + 4 + 4\,\text{sen}^2 t}$$

$$= \sqrt{4\underbrace{(\cos^2 t + \text{sen}^2 t)}_{=1} + 4} = 2\sqrt{2}$$

0,2

Logo,

0,5

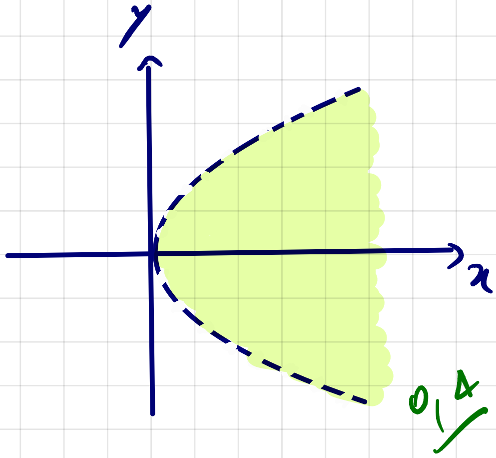
$$\ell = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \|\vec{f}\,'(t)\| \, dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\sqrt{2} \, dt = 2\sqrt{2}\, t \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \cancel{2}\sqrt{2}\,\frac{\pi}{\cancel{2}} = \sqrt{2}\,\pi \ \text{u.c.}$$

0,2

03) $f(x,y) = x + \ln(x - y^2)$

(a) $x - y^2 > 0 \iff x > y^2$



$\Omega = D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y^2\}$ 0,2

Ω é um aberto do $\mathbb{R}^2$ 0,2

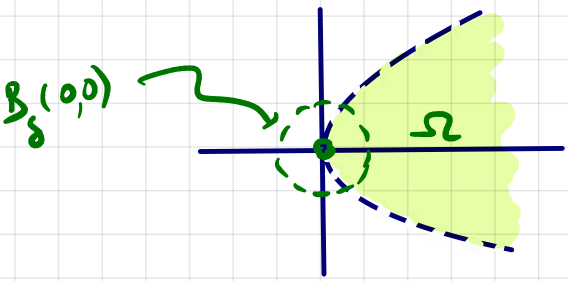
0,4

- fecho de Ω: $\overline{\Omega} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y^2\}$ 0,4
- fronteira de Ω: $\partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\}$ 0,4

A origem não é ponto interior de Ω, pois, $\forall\, \delta > 0$, $B_\delta(0,0) \not\subset \Omega$:

0,4

2,0



(b) $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy$; onde

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \frac{1}{x - y^2} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y}{x - y^2}$$

0,5

$$\Rightarrow df = \left(1 + \frac{1}{x - y^2}\right)dx + \left(\frac{-2y}{x - y^2}\right)dy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-2y}{x-y^2}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(-2y \cdot (x-y^2)^{-1}\right) = -2y \cdot (-1) \cdot (x-y^2)^{-2} \cdot 1$$

1.0

0,5

$$= \frac{2y}{(x-y^2)^2}$$

(c) $x = r^2 s^2$; $y = 2rs$. Assim:

- $$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{x-y^2}\right) \cdot 2rs^2 + \left(\frac{-2y}{x-y^2}\right) \cdot 2s$$

$$= \left(1 + \frac{1}{r^2s^2 - 4r^2s^2}\right) 2rs^2 - \left(\frac{2 \cdot (2rs)}{r^2s^2 - 4r^2s^2}\right) \cdot 2s$$

$$= \left(1 + \frac{1}{-3r^2s^2}\right) \cdot 2rs^2 - \frac{8\cancel{rs^2}}{-3r^{\cancel{2}}\cancel{s^2}}$$

0,5

$$= 2rs^2 - \frac{2}{3}\frac{\cancel{r}\cancel{s^2}}{r^{\cancel{2}}\cancel{s^2}} + \frac{8}{3r}$$

$$= 2rs^2 - \frac{2}{3r} + \frac{8}{3r} = 2rs^2 + \frac{6}{3r} = 2rs^2 + \frac{2}{r}$$

e:

- $\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$

$$= \left(1 + \frac{1}{x-y^2}\right) 2r^2 s - \frac{2y}{x-y^2} \cdot 2r$$

$$= \left(1 + \frac{1}{r^2s^2 - 4r^2s^2}\right) \cdot 2r^2 s - \frac{2 \cdot (2rs)}{r^2s^2 - 4r^2s^2} \cdot 2r$$

$$= 2r^2 s + \frac{2 \cancel{r^2} s}{-3 \cancel{r^2} s^2} - \frac{8 \cancel{r^2} \cancel{s}}{-3 \cancel{r^2} s^2}$$

0,5

1,0

$$= 2r^2 s - \frac{2}{3s} + \frac{8}{3s} = 2r^2 s + \frac{6}{3s} = 2r^2 s + \frac{2}{s}$$

(d) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \nabla f \cdot \vec{u} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \boxed{=}$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$ (unitário)

$$\boxed{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{x-y^2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{2y}{x-y^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1 - 2\sqrt{3}\,y}{x-y^2}\right]$$

0,5

0,5

04) $\vec{F}(x,y) = \left(\ln(xy - y^2) ; \sqrt{9-x^2-y^2}\right)$

$F_1(x,y) = \ln(xy - y^2)$; $F_2(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$

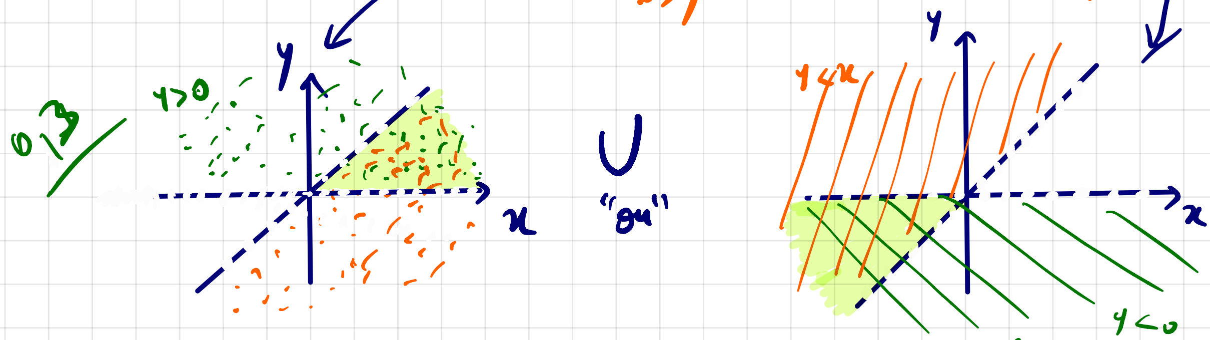
(a) $\Omega = D(\vec{F}) = ?$

$$xy - y^2 > 0 \iff y(x-y) > 0$$

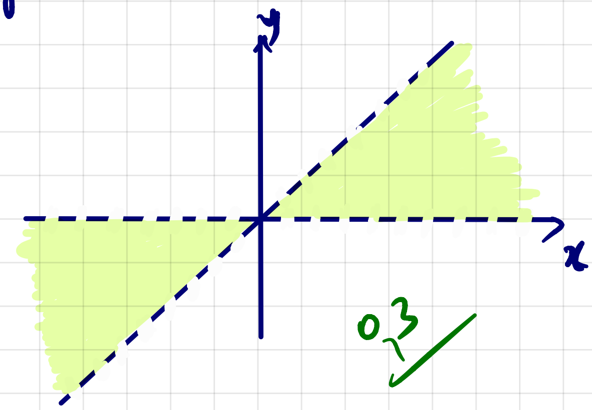
$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} y > 0 \\ x - y > 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y < 0 \\ x - y < 0 \end{cases}$$

$\hookrightarrow x > y$ $\qquad$ $\hookrightarrow x < y$



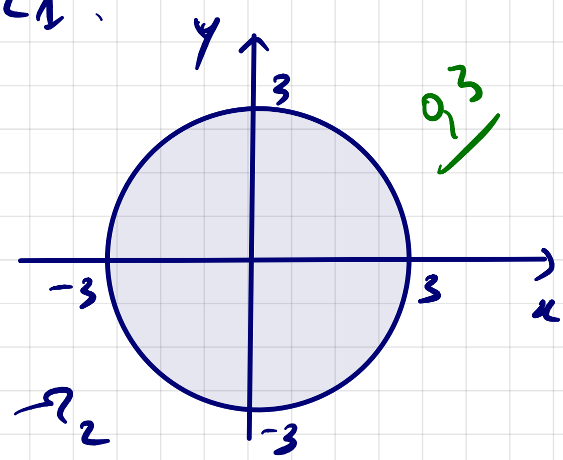
Logo, a região onde $xy - y^2 > 0$ será:



Ω_1.

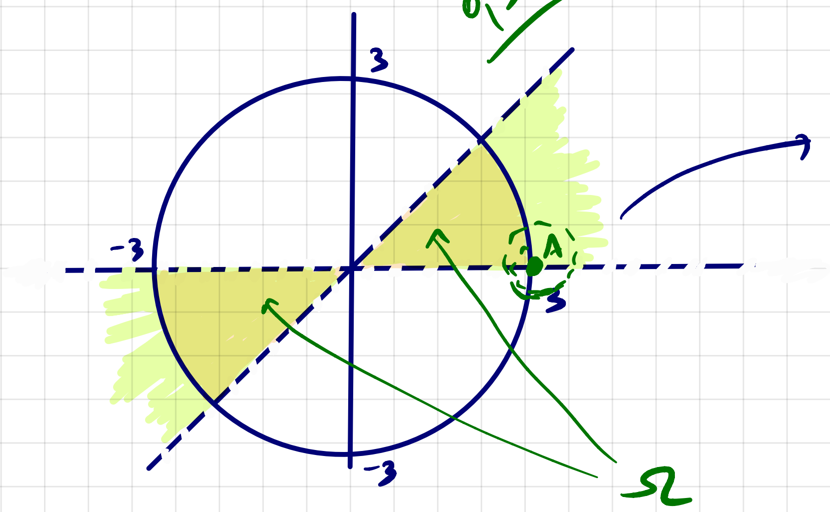
Resta encontrar a região Ω_2 onde $9 - x^2 - y^2 \geq 0$, e fazer a interseção com Ω_1.

$$9 - x^2 - y^2 \geq 0 \iff x^2 + y^2 \leq 9$$



Portanto $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$, i.e.;

0,3



o ponto $A(3,0)$ não é ponto interior do Ω, pois, $\forall\, \delta>0$, $B_\delta(A) \not\subset \Omega$. De fato, será um ponto de fronteira do conj. Ω. 0,3

Porém, $A \in \partial\Omega$ 0,3, logo, $A \in \overline{X}$ 0,3 pois podemos tomar, por ex., a sequência (x_n) definida por

$$x_n = \left(3 - \frac{1}{n}, 0\right);$$ que é tal que

$$x_n \in \Omega,\ \forall n \in \mathbb{N}, \text{ e}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = (3,0) = A.$$

3,0

Ω não é compacto de $\mathbb{R}^2$, pois embora seja limitado, ele não é fechado. 0,3

Por fim, $\vec{F}$ não é cont. na origem, pois $\vec{F}$ não está definida em $(0,0)$, já que $F_2(0,0) = \ln 0$, que não existe.

0,3

(b) $d_a\vec{F} = ?$ $\qquad a = (a_0, a_2)$.

$\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. $\qquad d_a\vec{F} = [\ ]_{2\times 2}$

$$d_a\vec{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix} (a_0, a_1)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{y}{xy-y^2} \;\; 0{,}2 & \frac{x-2y}{xy-y^2} \;\; 0{,}2 \\ \frac{1}{\cancel{2}}(9-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-\cancel{2}x) \;\; 0{,}2 & \frac{1}{\cancel{2}}(9-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-\cancel{2}y) \;\; 0{,}2 \end{bmatrix} (a_0, a_1)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\cancel{y}}{\cancel{y}(x-y)} & \frac{x-2y}{xy-y^2} \\ \frac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}} & \frac{-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}} \end{bmatrix} (a_0, a_1)$$

0,2

(c) (a) $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial x}$

$$= \frac{y}{xy-y^2} + \frac{-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$$ 0,5

(b) $\operatorname{div}(\nabla f) = \Delta f$: $f = f(x,y)$.

Como $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$, temos que:

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \operatorname{div}\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) =$$

1,5

2,0

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \Delta f.$$

05) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(a) $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\Delta x \cdot 0}{\Delta x^2 + 0^2} - 0}{\Delta x} = 0$$

0,5

1,0

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\dfrac{0 \cdot \Delta y}{0^2 + \Delta y^2} - 0}{\Delta y} = 0$$

0,5

(b) • $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=0}} \frac{x \cdot 0}{x^2+0^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=0}} 0 = 0$$

0,2

• $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=x}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=x}} \frac{x \cdot x}{x^2+x^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=x}} \frac{\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}} = \frac{1}{2}$$

0,2

0,5

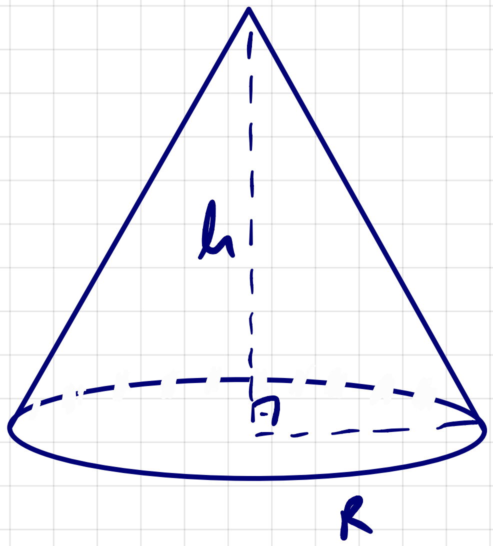
Como por 2 caminhos diferentes resultam em limites diferentes, concluímos que $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. 0,1

Portanto, f não é cont. em (0,0).

(c) Não são contraditórias pois a existência de derivadas parciais em um ponto não é garantia de continuidade no referido ponto. O que vale é se f for diferenciável então f é contínua. 0,5

No caso acima, f não é diferenciável na origem, pois não é contínua.

06)



$$\frac{\partial R}{\partial t} = 4{,}6 \text{ cm/s}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -6{,}5 \text{ cm/s}.$$

0,1

$$V = \frac{Ab \cdot h}{3} = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial R} \cdot \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial t}$$ 0,1 ; onde:

$$\frac{\partial V}{\partial R} = \frac{6\pi R^2 h}{3} = 2\pi R^2 h$$ 0,2 e $$\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi}{3} R^3.$$ 0,2

Assim:

$$dV = 2\pi R^2 h \cdot 4{,}6 + \frac{\pi}{3} R^3 \cdot (-6{,}5) \Big|_{\substack{R = 300\text{ cm} \\ h = 350\text{ cm}}}$$

0,2

$$= 2\pi \cdot (300)^2 \cdot 350 \cdot (4{,}6) + \frac{\pi}{3} \cdot (300)^3 \cdot (-6{,}5)$$

$$= 289.800.000\,\pi - 58.500.000\,\pi$$

1,0

$$= 331.300.000\,\pi\ cm^3 = 331{,}3\,\pi\ m^3$$

0,2