Fundação Universidade Federal de Pelotas
Departamento de Matemática e Estatística
Segunda Prova de Geometria Analítica
Cursos de Física, Química e Matemática
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: GABARITO. **Data:** 21/09/2023.

Questão 01. Dados os pontos $A(1,0,-2)$, $B(2,2,1)$, $C(0,3,2)$ e $D(1,1,1)$ no $\mathbb{R}^3$.

(a) [Peso 1,0] Obtenha a equação do plano que contenha os pontos A, B e C.

(b) [Peso 0,5] Encontre a área do paralelogramo de lados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

(c) [Peso 0,5] Encontre uma equação para a reta que passa pelos pontos A e D.

(d) [Peso 0,5] Obtenha a medida do volume do paralelepípedo formado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$.

Questão 02. [Peso 1,0] Determine o vetor $\vec{u}$ tal que $||\vec{u}|| = 2$, o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v} = (1,-1,0)$ é $45°$ e $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{w} = (1,1,0)$.

Questão 03. Sejam (r) e (s) as retas de equações

$$(r) : \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -2 + 2t \\ z = t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad (s) : \frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{3}.$$

(a) [Peso 0,5] Obtenha o ângulo formado por (r) e (s).

(b) [Peso 1,0] Encontre a equação da reta que seja perpendicular a (r) e a (s) e que passe pelo ponto $A(2,-1,1)$

(c) [Peso 0,5] Encontre a equação do plano (π) que contém as retas (r) e (s).

Questão 04. Esboce o gráfico da superfície dada por cada equação abaixo: [Peso 0,5 cada]

(a) $x^2 + 4z^2 = 4$ (b) $x^2 + 16z^2 = 4y^2 - 16$ (c) $y^2 = z$

Questão 05. [Peso 1,5] Considere a seguinte equação, expressa no sistema de coordenadas esféricas:

$$\rho = 6 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta + 4 \cos \varphi.$$

Representá-la no sistema de coordenadas cartesianas, identificando o lugar geométrico no $\mathbb{R}^3$, esboçando-o.

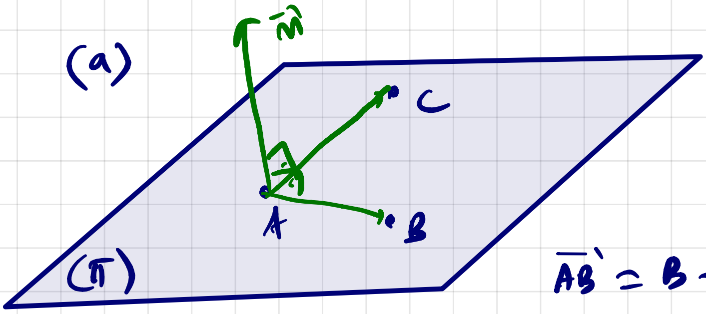
Questão 06. Uma curva no $\mathbb{R}^3$ é dada por $\vec{f}(t) = (2, 4\cos t, \operatorname{sen} t)$.

(a) [Peso 1,0] Esboce o seu gráfico.

(b) [Peso 1,0] Encontre a equação da reta que passa pela origem e que é perpendicular aos vetores $\vec{f}(0)$ e $\vec{f}(\frac{\pi}{2})$.

01) $A(1,0,-2)$; $B(2,2,1)$; $C(0,3,2)$; $D(1,1,1)$.

(a)



$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$,

0,1

$\vec{AB} = B - A = (2,2,1) - (1,0,-2) = (1,2,3)$

$\vec{AC} = C - A = (0,3,2) - (1,0,-2) = (-1,3,4)$

0,1

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \left|\begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & -1 & 3 \end{array}\right|$$

$$\begin{array}{cccccc} - & - & - & + & + & + \end{array}$$

0,5

$$= 8\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k} + 2\vec{k} - 9\vec{i} - 4\vec{j}$$

$$= -\vec{i} - 7\vec{j} + 5\vec{k} = (-1,-7,5)$$

(π): $ax + by + cz + d = 0$

$-x - 7y + 5z + d = 0$; $A(1,0,-2) \in (\pi)$:

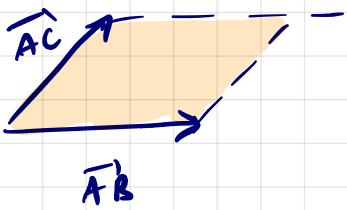
$-(1) - 7\cdot(0) + 5\cdot(-2) + d = 0$

$-1 - 10 + d = 0 \Rightarrow \boxed{d = 11}$ 0,1

1,0

Portanto, obtemos: $\boxed{(\pi): -x - 7y + 5z + 11 = 0}$ 0,2

(b) área S:



$S = \| \vec{AB} \times \vec{AC} \|$, onde:

0,2

$\vec{AB} \times \vec{AC} = (-1,-7,5)$ [pelo item (a)]

$$\begin{array}{r|l} 75 & 5 \\ 15 & 5 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

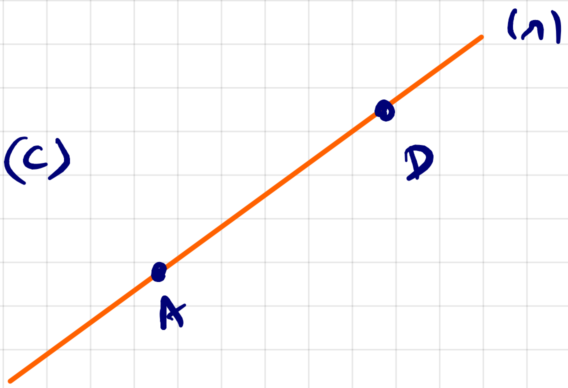
Logo, temos:

$$S = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2 + (5)^2} = \sqrt{1 + 49 + 25} = \sqrt{75}$$

0,5

0,3 $= \sqrt{5^2 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$ unidades de área.

(c)



vetor diretor para (r) pode ser:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AD} = D - A$$
$$= (1, 1, 1) - (1, 0, -2)$$
$$= (0, 1, 3)$$ 0,3

0,5

$$(r): \begin{cases} x = x_A + 0t \\ y = y_A + 1 \cdot t \\ z = z_A + 3t \end{cases} = \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$ 0,2

(d) Volume V será:

$$V = \left| \left[\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{AD} \right] \right| =$$

$$= \left| \left[(1, 2, 3) ; (-1, 3, 4) ; (0, 1, 3) \right] \right|$$

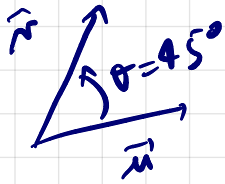
0,5

$$= \left| \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right|$$

$$= |9 + 0 - 3 - 0 - 4 + 6| = 8 \text{ unidades de volume.}$$

02) $\vec{u} = (a, b, c) = ?$

temos: $\|\vec{u}\| = 2$, i.e., $\boxed{\sqrt{a^2+b^2+c^2} = 2}$ (*)



$\vec{u} \perp \vec{w}$; $\vec{w} = (1, 1, 0)$

$\vec{v} = (1, -1, 0)$.

$$\cos 45° = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \quad ; \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + 0^2}$$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$ 0,2

$$\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \frac{(a, b, c) \cdot (1, -1, 0)}{\cancel{2} \cdot \sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = a - b + 0$$

$$\boxed{a - b = 2}$$ 0,3

Como $\vec{u} \perp \vec{w}$, então $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$, i.e.,

$$(a, b, c) \cdot (1, 1, 0) = 0$$

$$\Rightarrow a + b + 0 = 0$$

Temos então: $\boxed{a + b = 0}$ 0,1

$$+\begin{cases} a - \cancel{b} = 2 \\ a + \cancel{b} = 0 \end{cases}$$ 0,1

$$2a = 2 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

$$\begin{cases} b = -a \\ \boxed{b = -1} \end{cases}$$

Logo, obtemos: $\vec{u} = (a, b, c) = (1, -1, c)$

Ainda, de (*), temos:

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} = 2$$

$$\sqrt{(1)^2+(-1)^2+c^2} = 2$$

$$1+1+c^2 = 4$$

$$c^2 = 2 \longrightarrow c = \pm\sqrt{2}$$

0,2

1,0

Resposta: $\vec{u} = (a, b, c) = (1, -1, \sqrt{2})$ ou $(1, -1, -\sqrt{2})$

0,1

---

03)

(a) Basta observar os ângulos dos vetores diretores:

$\vec{u} = (-3, 2, 1)$; 0,1 [VETOR DIRETOR DE (r)]

$\vec{v} = (-2, 1, 3)$ 0,1 [VETOR DIRETOR DE (s)]

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|} = \frac{(-3,2,1)\cdot(-2,1,3)}{\sqrt{9+4+1}\cdot\sqrt{4+1+9}} = \frac{6+2+3}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}}$$

0,5

$$\Rightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{11}{14}}$$

0,3

(b) Seja (w) a reta procurada. Seu vetor diretor será

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \left|\begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ -3 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right|$$

0,5

$$\vec{w} = 6\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k} + 4\vec{k} - \vec{i} + 9\vec{j}$$

$$\vec{w} = 5\vec{i} + 7\vec{j} + 1\vec{k} = (5, 7, 1)$$

Assim, obtemos, usando o vetor diretor $\vec{w}$ e o ponto $A(2,-1,1)$;

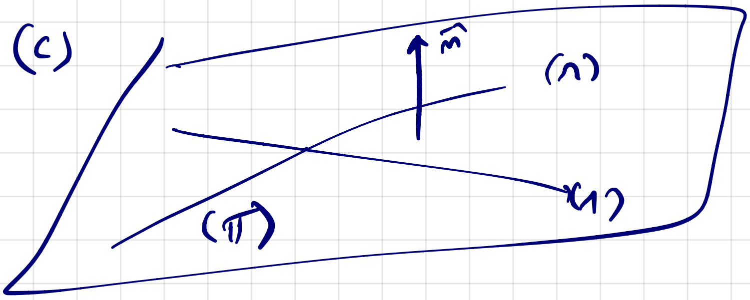
$$(w): \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \quad ; \text{ i.e.;}$$

0,5

1,0

$$(w): \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = -1 + 7t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

(c)



$\vec{m} = \vec{w} = (5, 7, 1)$ 0,1

$(r) \subset (\pi)$; então, todo ponto de (r) é ponto em (π). Assim, tomando $t = 0$, temos, pela eq. da reta (r), o ponto A:

$$\begin{cases} x_A = 1 - 3\cdot 0 \\ y_A = -2 + 2\cdot 0 \\ z_A = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1, -2, 0)$$

0,2

CORRIGIR ENUNCIADO: OBTER A EQ. DO PLANO PARALELO A (r) E (s) E QUE CONTÉM A RETA (r)

(pelo erro no enunciado, vou considerar certo independente da interpretação)

$(\pi): 5x + 7y + z + d = 0$; $A \in (\pi)$:

$$5\cdot(1) + 7\cdot(-2) + 0 + d = 0$$

$$d = 14 - 5 \Rightarrow d = 9$$

0,5

$$\Rightarrow \boxed{(\pi): 5x + 7y + z + 9 = 0}$$

0,2

04)

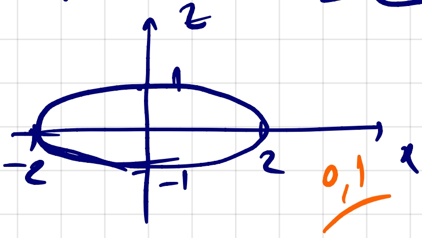
(a) $x^2+4z^2=4 \quad (\div 4)$

$\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{1}=1$ no plano xz: elipse.

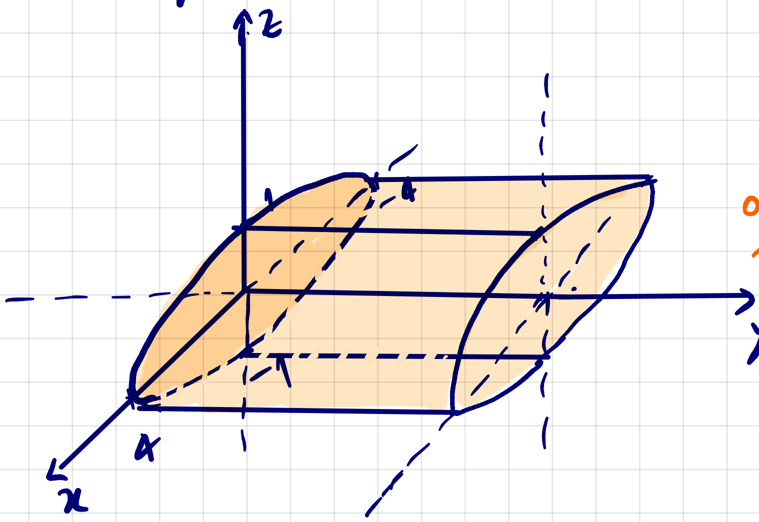
0,1

$\Downarrow$

cilindro elíptico.



0,1



0,3

0,5

(b) $x^2-4y^2+16z^2=-16 \quad \div(-16)$

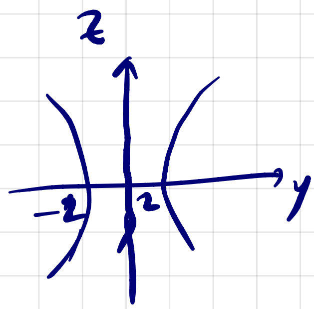
$-\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{1}=1$ (HIPERBOLÓIDE DE 2 FOLHAS)

0,1

traços:

• $x=0$ (plano yz):

$\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{1}=1$ (hipérbole)



• $y=0$ (plano xz):

$-\frac{x^2}{16}-\frac{z^2}{1}=1$ não tem traço!

0,2

• $z = 0$ (plano xy):

$$-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$ (hiperbolóide)

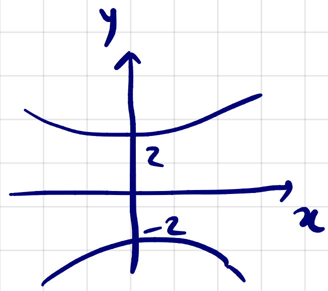
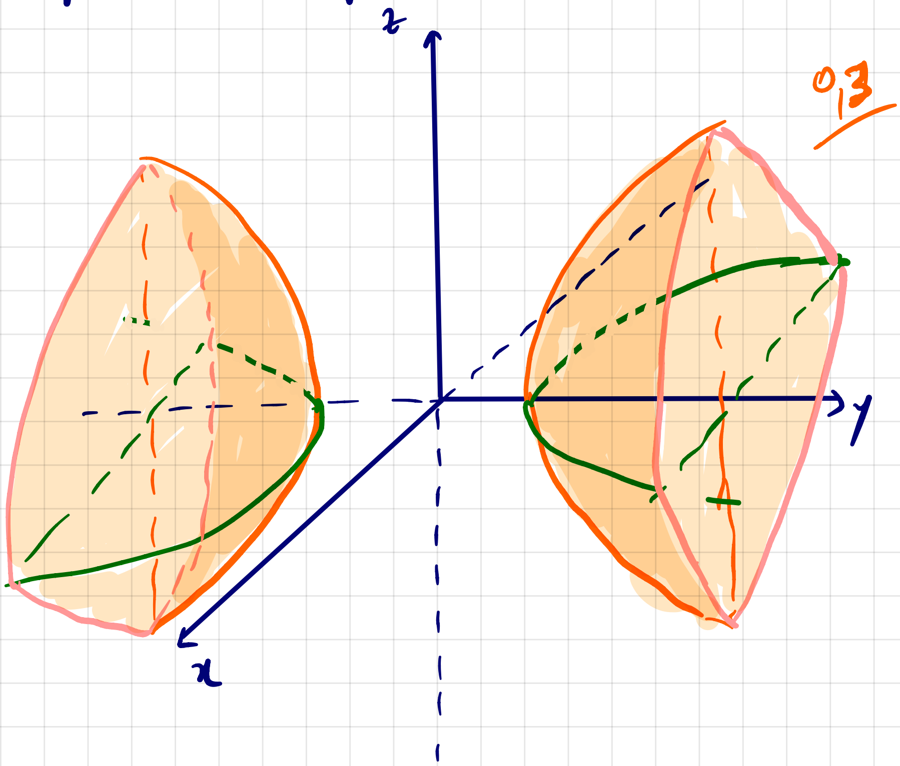


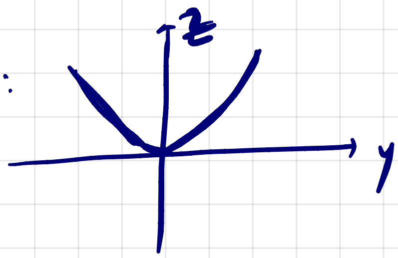
gráfico da superfície:



0,5

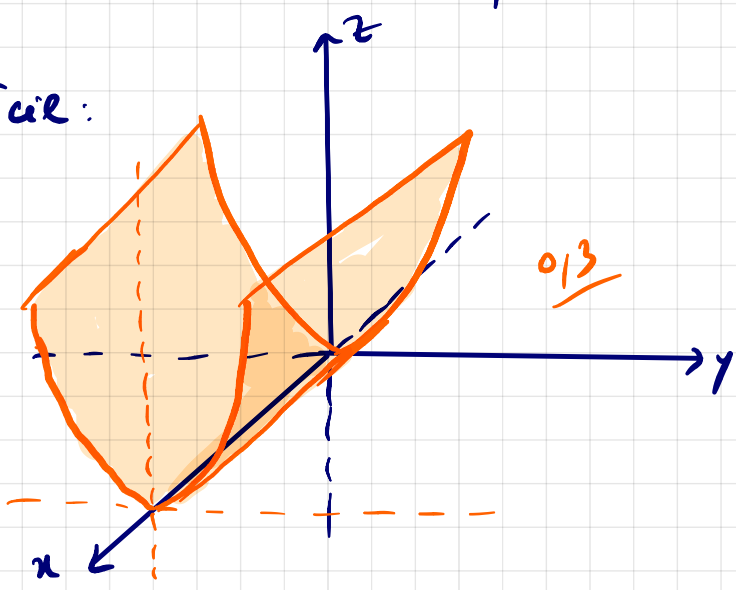
(c) $y^2 = z$ (cilindro parabólico)

↳ plano zy:



0,2

superfície:



0,5

05) $\rho = 6 \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta + 4 \cdot \cos\varphi \quad (\times \rho)$

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \operatorname{sen}\varphi \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

0,2

RELAÇÃO ENTRE SIST. RET. E ESFÉRICO.

$\rho^2 = 6\rho \operatorname{sen}\varphi \cdot \operatorname{sen}\theta + 4\rho \cdot \cos\varphi$

Como

$\boxed{\rho^2 = x^2+y^2+z^2}$ 0,1 ; obtemos:

$$\boxed{x^2+y^2+z^2 = 6y + 4x}$$ 0,4

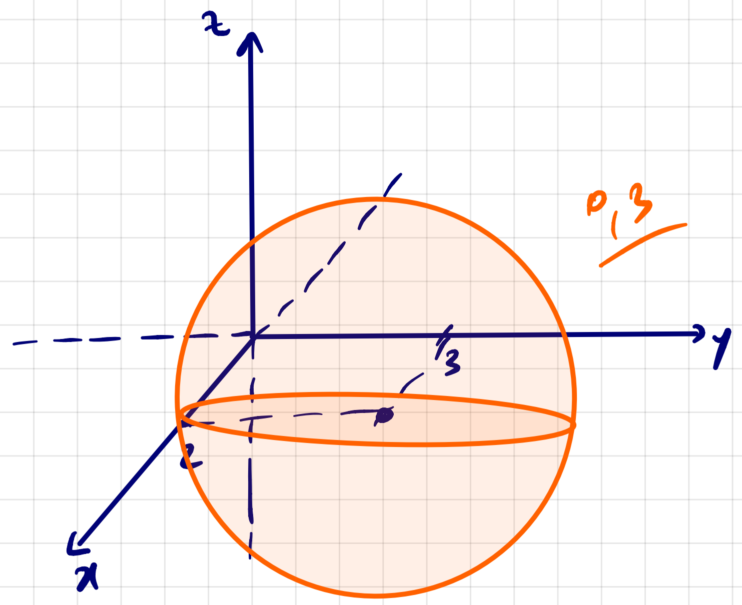
$x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 = 0$

$(x-2)^2 - 4 + (y-3)^2 - 9 + z^2 = 0$ 0,3

$\boxed{(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-0)^2 = 13}$ → superfície esférica centrada em $C(2,3,0)$ e raio $\sqrt{13}$.

0,2

esboço gráfico:



0,3

1,5

06) $\vec{f}(t) = (2,\ 4\cos t,\ \text{sen}\, t)$

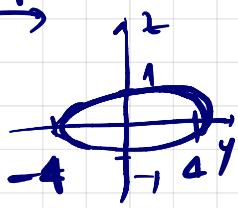
(a)
$$\begin{cases} \boxed{x = 2} \\ y = 4\cos t \\ z = \text{sen}\, t \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{y}{4} = \cos t$$

0,1

$$\text{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

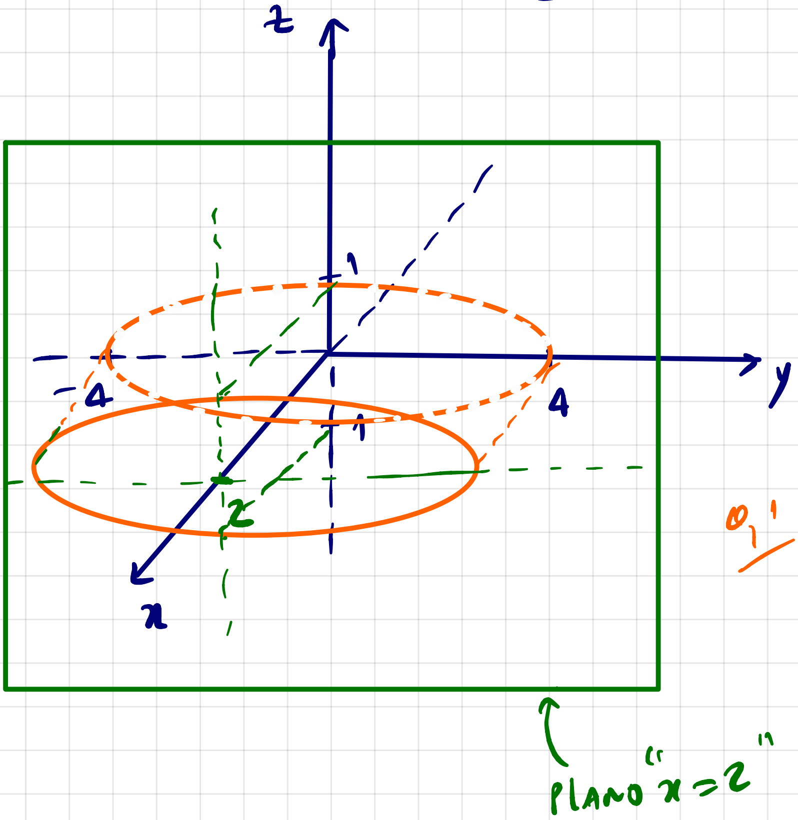
$$\Longleftrightarrow \quad z^2 + \frac{y^2}{16} = 1 \quad \text{(elipse)}$$

no plano yz



0,2

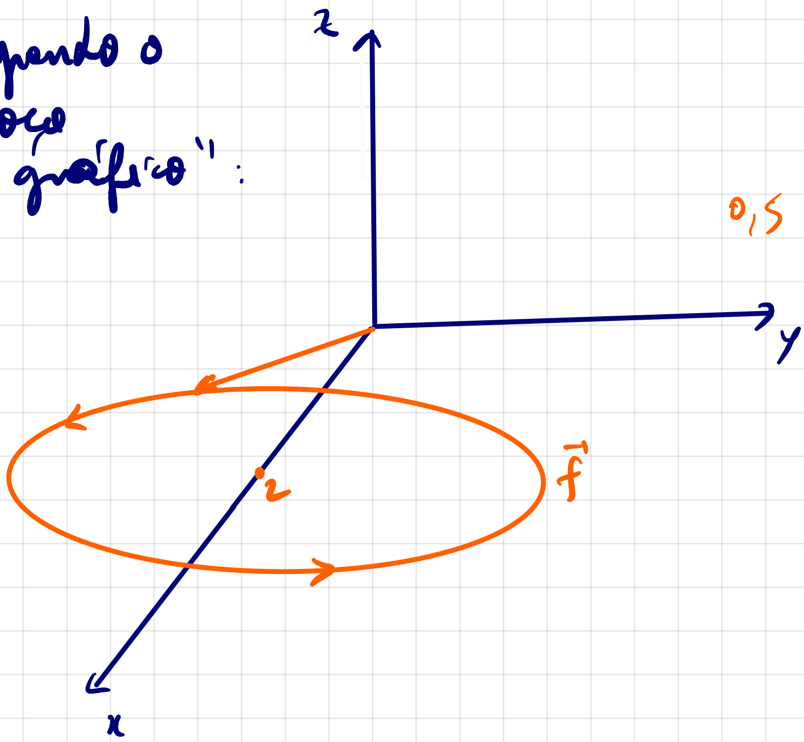
0,1



0,1

"limpando o esboço gráfico":

0,5



1,0

(b) $O(0,0,0)$; (r) é perpendicular aos vetores:

$\vec{u} = \vec{f}(0)$ e

$\vec{v} = \vec{f}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$\vec{u} = \vec{f}(0) = (2, 4\cos 0, \operatorname{sen} 0) = (2, 4, 0)$ 0,1

$\vec{v} = \vec{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(2, 4\cos\frac{\pi}{2}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = (2, 0, 1)$ 0,1

O vetor diretor de (r) será:

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{matrix}$$

$= 4\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} - 8\vec{k} - 0.\vec{i} - 2\vec{j}$

$= (4, -2, -8) = (a, b, c)$

0,5

Logo, a eq. da reta será:

$$(r): \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + c.t \end{cases}$$

$O(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$

$$(r): \begin{cases} x = 4t \\ y = -2t \\ z = -8t \end{cases}$$

0,3

1,0