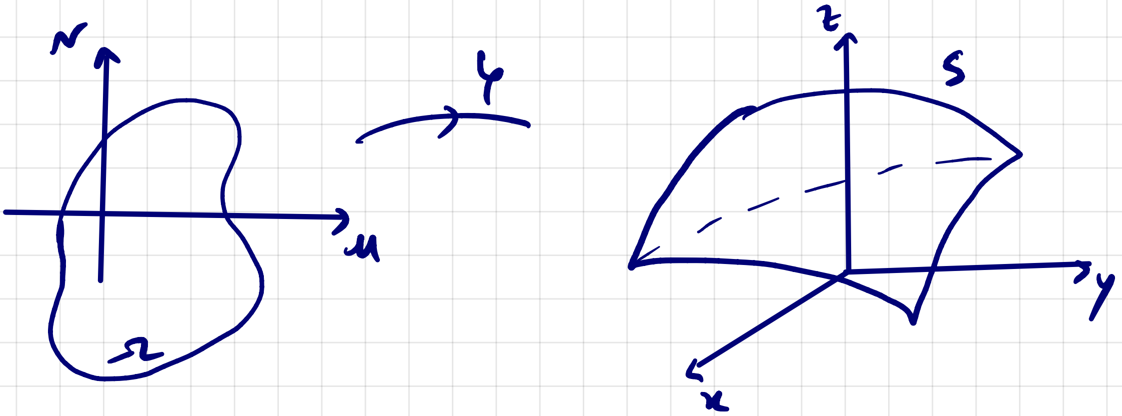
06/09/23 – AULA 22

No final da aula anterior iniciamos o estudo de parametrização de superfícies no $\mathbb{R}^3$. Se S é uma superfície no $\mathbb{R}^3$ dada por $f(x,y,z)=0$, então uma parametrização φ para f é da forma: $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

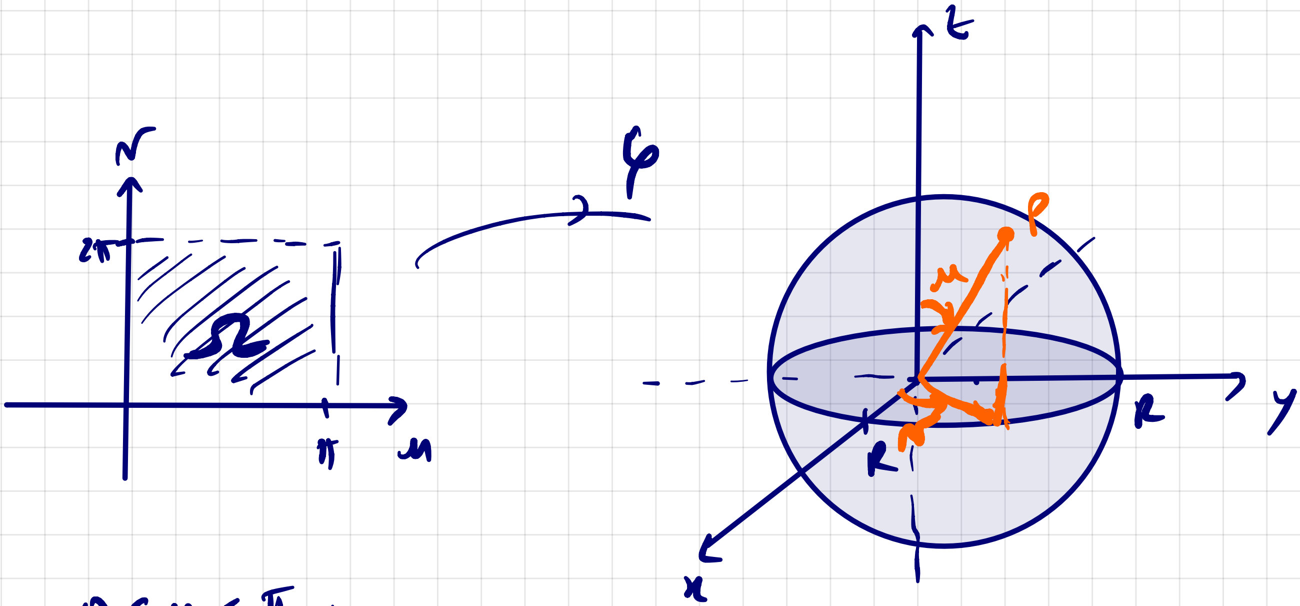
$$\varphi(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$$



seguindo nos exemplos:

02) PARAMETRIZAÇÃO DA ESFERA $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Uma parametrização para a esfera será dada pelas equações do sist. de coordenadas esféricas.



$0 \le u \le \pi$;

$0 \le v \le 2\pi$

SIST. COORD. ESFÉRICAS

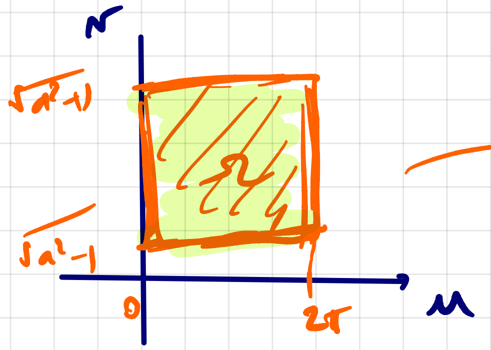
$$\begin{cases} x = R.\cos v.\operatorname{sen} u \\ y = R.\operatorname{sen} v.\operatorname{sen} u \\ z = R.\cos u \end{cases}$$

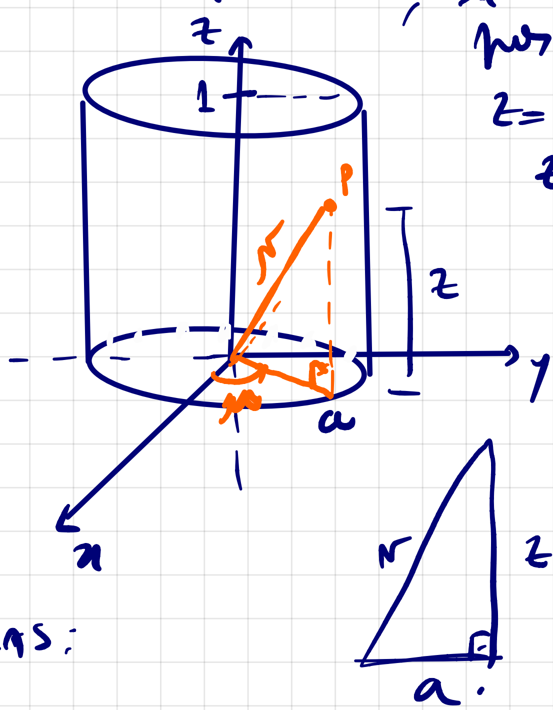
– fornece a parametrização.

ou seja; $\varphi(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$

$$\varphi(u,v) = (R\cos v.\operatorname{sen} u,\ R.\operatorname{sen} v.\operatorname{sen} u,\ R\cos u)$$

03) PARAMETRIZAÇÃO DO CILINDRO $x^2+y^2=a^2$; limitado por $z=0$ e $z=1$.
$(a \geq 1)$





SERÁ O SIST. DE COORD. CILÍNDRICAS:

$x = a\cdot\cos u$

$y = a\operatorname{sen} u$

$z = \sqrt{v^2-a^2}$

$z = \sqrt{v^2-a^2}$

$u \in [0,2\pi]$ $\quad z \in [0,1]$

$\Updownarrow$

$\sqrt{a^2-1} \leq v \leq \sqrt{a^2+1}$

$0 \leq z \leq 1$

$0 \leq \left(\sqrt{v^2-a^2}\right)^2 \leq 1^2$

$|v^2-a| \leq 1$

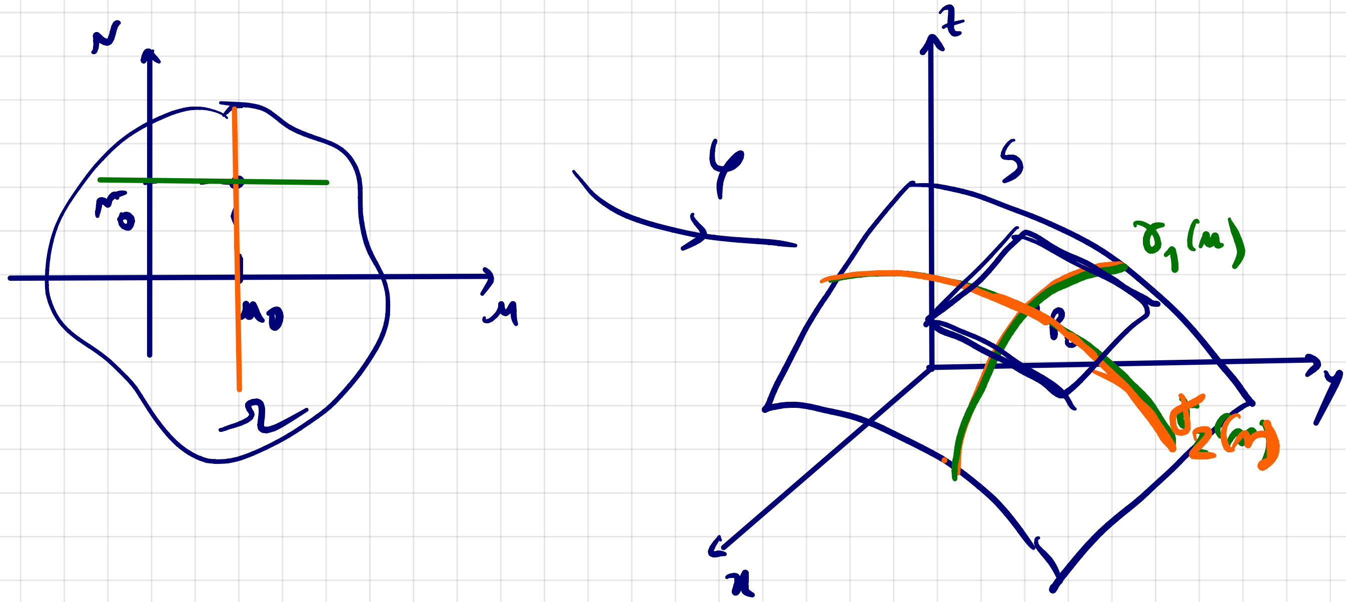
$-1 \leq v^2-a^2 \leq 1$

$$\varphi(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$$

$$= (a\cos u,\ a\operatorname{sen} u,\ \sqrt{v^2-a^2})$$

DETERMINAÇÃO DA EQUAÇÃO DO PLANO TANGENTE A UMA SUPERFÍCIE S DO $\mathbb{R}^3$:

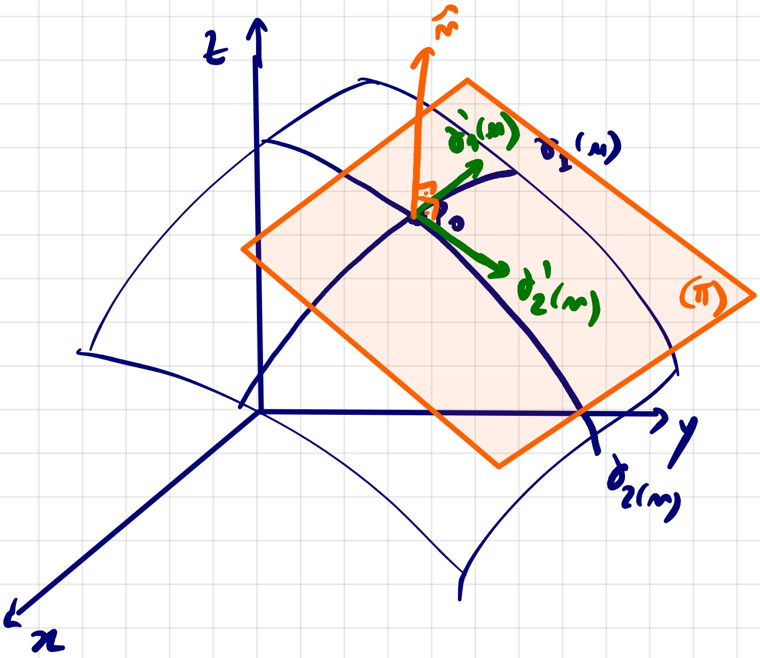
Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada por $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$; $\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$



Seja $(u_0, v_0) \in \Omega$ e tome em S o ponto $P_0 = \varphi(u_0, v_0)$. Queremos obter a eq. do plano tangente à superfície S em P_0.

Considere as retas $u = u_0$ (CONSTANTE) e $v = v_0$ (CONSTANTE). Tais retas, mediante φ, determinam as imagens $\gamma_1(u) = \varphi(u, v_0)$ e $\gamma_2(v) = \varphi(u_0, v)$, chamadas, respectivamente, de u-curva e v-curva.

Para encontrar a eq. do plano tangente em P_0, já temos o ponto P_0, resta obter um vetor normal $\vec{n}$ ao plano desejado.



Por construção, $\vec{n} = \gamma_1'(u_0) \times \gamma_2'(v_0)$,

onde:

$$\gamma_1'(u_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0,v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0)\right)$$

$$\varphi = (x, y, z)$$

e

$$\gamma_2'(v_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0,v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0)\right)$$

Para facilitar a notação, escreva.

$$\gamma_1'(u_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0,v_0) := \varphi_{u_0} \quad e$$

$$\gamma_2'(v_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0,v_0) = \varphi_{v_0}$$

Então, teremos

$$\vec{n} = \varphi_{u_0} \times \varphi_{v_0}$$; o que, juntamente

com o ponto P_0, determina-se a eq. do plano (π), tangente à superfície em P_0.

<u>Ex.</u>: Obtenha o plano tangente à superfície com equações paramétricas $x = u^2$, $y = v^2$, $z = u + 2v$; no ponto $P_0(1, 1, 3)$.

<u>SOLUÇÃO</u>: $\varphi(u,v) = (u^2, v^2, u+2v)$

$P_0(1, 1, 3)$

$$\vec{n} = \varphi_{u_0} \times \varphi_{v_0}$$, onde

$$\varphi_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) = (2u, 0, 1);$$

$$\varphi_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right) = (0, 2v, 2)$$

$$\Rightarrow \varphi_{u_0} = (2u_0, 0, 1) \; ; \; \varphi_{v_0} = (0, 2v_0, 2)$$

Como $P_0(1, 1, 3)$; então:

$$\begin{cases} u_0^2 = 1 \longrightarrow u_0 = \pm 1 \\ v_0^2 = 1 \longrightarrow v_0 = \pm 1 \\ u_0 + 2v_0 = 3 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{u_0 = 1 \ , \ v_0 = 1}$$

Assim,

$$\varphi_{u_0} = (2, 0, 1) \quad e \quad \varphi_{v_0} = (0, 2, 2)$$

$$\Longrightarrow \vec{n} = \varphi_{u_0} \times \varphi_{v_0} = \left| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{array} \right| \begin{array}{cc} \vec{i} & \vec{j} \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{array}$$

$$\vec{n} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 4\vec{k} - 0\vec{k} - 2\vec{i} - 4\vec{j}$$

$$\vec{n} = (-2, -4, 4) = (a, b, c)$$

Então, a eq. do plano (π), tangente em P_0, será:

$$(\pi): \ ax + by + cz + d = 0$$

$$(\pi): \ -2x - 4y + 4z + d = 0$$

$$P_0(1, 1, 3) \in (\pi) \Longrightarrow -2 \cdot (1) - 4 \cdot (1) + 4 \cdot (3) + d = 0$$

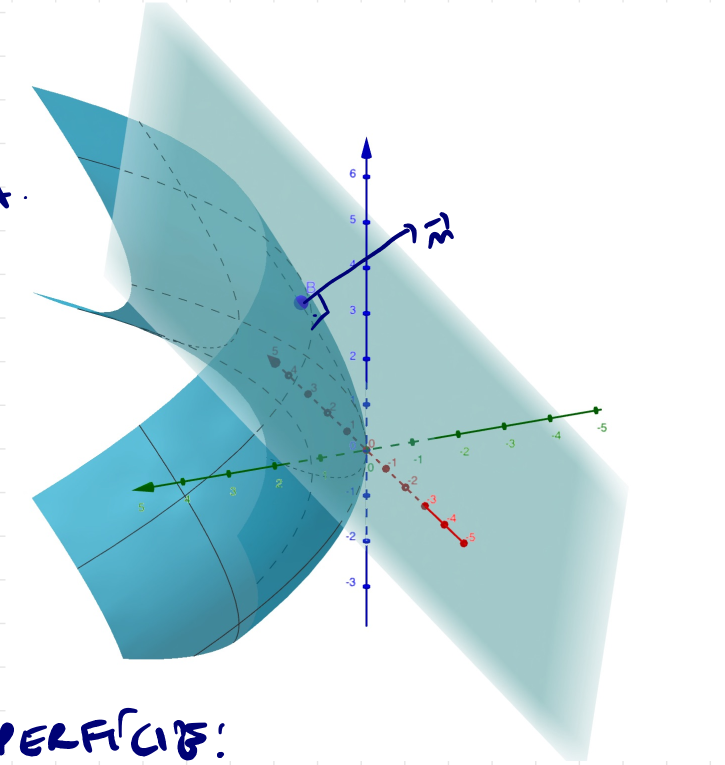
$$-6 + 12 + d = 0 \Rightarrow \boxed{d = -6}$$

$$\Rightarrow (\pi): -2x - 4y + 4z - 6 = 0 \quad \div (-2)$$

$$\boxed{(\pi): \ x + 2y - 2z + 3 = 0}$$

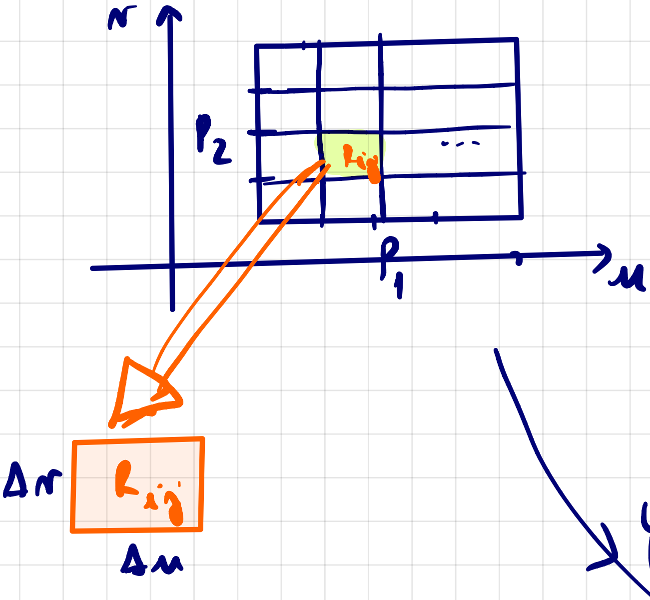
DESENHO:

FEITO NO GEOGEBRA.

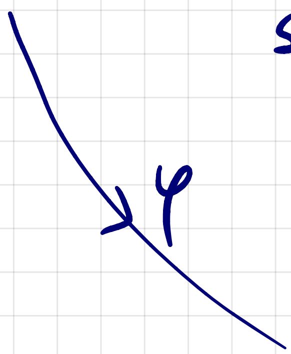


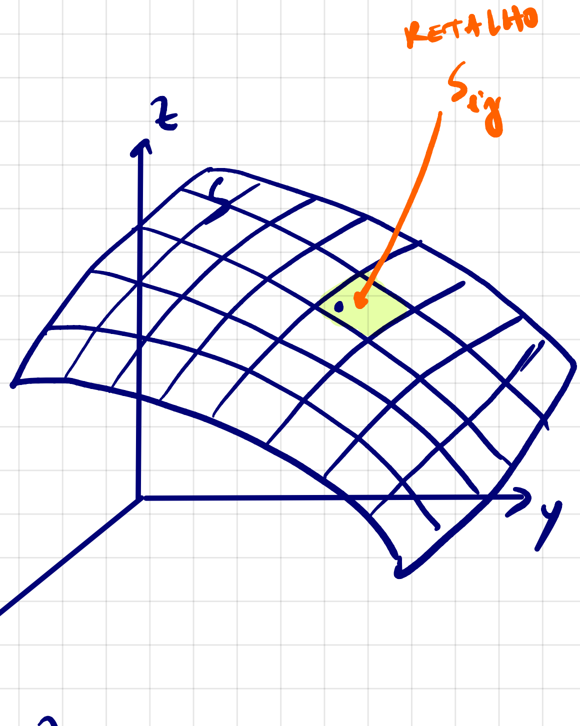
ÁREA DA SUPERFÍCIE:

Para simplificar, suponha Ω um retângulo do $\mathbb{R}^2$. Seja $P = P_1 \times P_2$ uma partição regular de Ω, determinando sub-retângulos R_{ij} de dimensões Δu e Δv.



Esta partição divide a superfície S em RETALHOS S_{ij}





(seguiremos na sexta...)