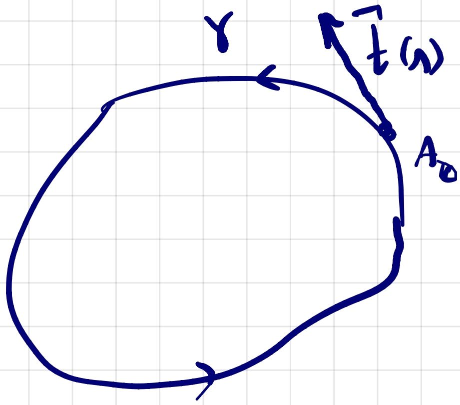
Vamos estudar a segunda versão vetorial do Teorema de Green no plano.

Seja $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\,\vec{i} + Q(x,y)\,\vec{j}$ um campo vetorial e seja $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, cf. estudado na aula passada. Assim, seja

$$\vec{t}(s) = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}\right) \text{ o}$$

vetor tangente unitário em γ em um ponto $A_0 \in \gamma$



Vamos considerar $\vec{F}(x,y) \cdot \vec{t}(s)$.

$$\vec{F}(x,y) \cdot \vec{t}(s) = \left(P(x,y), Q(x,y)\right) \cdot \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}\right)$$

Assim:

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot \vec{t}(s)\, ds = \oint_\gamma (P, Q)\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}\right) ds$$

$$= \oint_\gamma P\,dx + Q\,dy$$

Considerando a "adaptação"

(P, Q, R); onde $R = 0$,

temos:

$$\text{rot } \vec{F} = \left| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{matrix} \right| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{matrix}$$

$$= 0 \cdot \vec{i} + \underbrace{\frac{\partial P}{\partial z}}_{\substack{= 0 \text{ pois} \\ P = P(x,y)}} \vec{j} + \frac{\partial Q}{\partial x} \vec{k} - \frac{\partial P}{\partial y} \vec{k} - \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial z}}_{\substack{= 0, \text{ pois} \\ Q = Q(x,y)}} \vec{i} - 0 \vec{j}$$

$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Então: $\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{k} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) \underbrace{\vec{k} \cdot \vec{k}}_{= 1}$

$$= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}$$

Pelo T. de Green clássico no $\mathbb{R}^2$:

$$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

$\Omega = \text{int}(\gamma)$

$$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = \oint_\gamma \vec{F}\cdot\vec{t}(s)\,ds \qquad\qquad \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_\Omega \text{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{k}\,dA$$

$$\Longrightarrow \boxed{\oint_\gamma \vec{F}\cdot\vec{t}(s)\,ds = \iint_\Omega \text{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{k}\,dA}$$

Ou seja, acabamos de provar o seguinte resultado, conhecido como Teorema de STOKES (no plano):

TEOREMA DE STOKES Sejam γ uma curva fechada seccionalmente suave, parametrizada pelo comprimento de arco, $\vec{t}$ um vetor tangente unitário à γ em um ponto sobre γ, $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ um campo vetorial; então

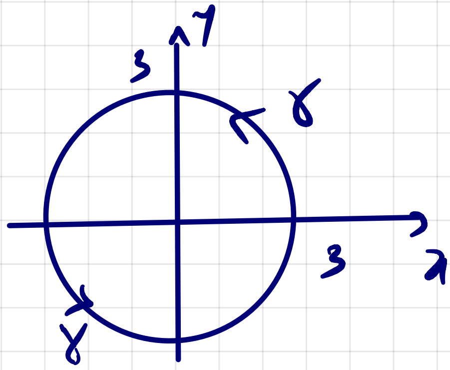
$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot\vec{t}(s)\,ds = \iint_\Omega \text{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{k}\,dA,$$

onde $\Omega = \text{int}(\gamma)$.

EXEMPLO: Verifique o teorema de STOKES no plano para $\vec{F}(x,y) = (xy^2, x^2y)$; na circunf. $x^2+y^2=9$

SOLUÇÃO:

$$\begin{cases} x = 3\cos s \\ y = 3\,\text{sen}\, s \end{cases}$$



$$\gamma(s) = (3\cos s,\ 3\,\text{sen}\, s)$$

$$\gamma'(s) = (-3\,\text{sen}\, s,\ 3\cos s) = \vec{t}(s)$$

Por um lado,

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot\vec{t}(s)\,ds = \int_0^{2\pi} (27\cos s\cdot\text{sen}^2 s,\ 27\cos^2 s\,\text{sen}\, s)(-3\,\text{sen}\, s,\ 3\cos s)\,ds$$

$$= \int_0^{2\pi} -81\,(\text{sen}\, s)^3\cdot\cos s\,ds + 81\int_0^{2\pi} (\cos s)^3 (-\text{sen}\, s\,ds)$$

$\int r^k\,dr$ $\qquad$ $\to r = \cos s$

$r = \text{sen}\, s \Rightarrow dr = \cos s\,ds$ $\qquad$ $dr = -\text{sen}\, s\,ds$

$$-81\frac{(\text{sen}\, s)^4}{4} - 81\frac{(\cos s)^4}{4}\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$-\frac{81}{4}\cdot\Big[\underbrace{(\text{sen}\,2\pi)^4}_{=0} + \underbrace{(\cos 2\pi)^4}_{1} - \big(\underbrace{(\text{sen}\,0)^4}_{0} + \underbrace{(\cos 0)^4}_{1}\big)\Big]$$

$$= 0$$

Por outro lado:

$$\iint_{\Omega} \text{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{k}\,dA = ?$$

$$\text{rot}\,\vec{F} = \left|\begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ xy^2 & x^2y & 0 & xy^2 & x^2y \end{array}\right.$$

$$= 0\vec{i} + 0\vec{j} + \cancel{2xy}\,\vec{k} - \cancel{2xy}\,\vec{k} - 0\vec{i} + 0\vec{j}$$

$$= (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \iint_{\Omega} \text{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{k}\,dA = \iint_{\Omega} (0,0,0)\cdot(0,0,1)\,dA$$

$$= \iint_{\Omega} 0\,dA = 0.$$

$\square$

SUPERFÍCIES NO $\mathbb{R}^3$:

Uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ é um conjunto de pontos $P(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $f(x,y,z) = 0$, sendo f uma função contínua.

A equação $f(x,y,z) = 0$ é dita na FORMA IMPLÍCITA. Quando for possível isolar uma das variáveis, então a eq. da superfície é dita na forma explícita.

Ex.: $z = g(x,y)$

Por exemplo, a eq. $x^2+y^2+z^2-9=0$ está na forma implícita e a superfície S que ela representa é uma esfera centrada na origem e raio 3.

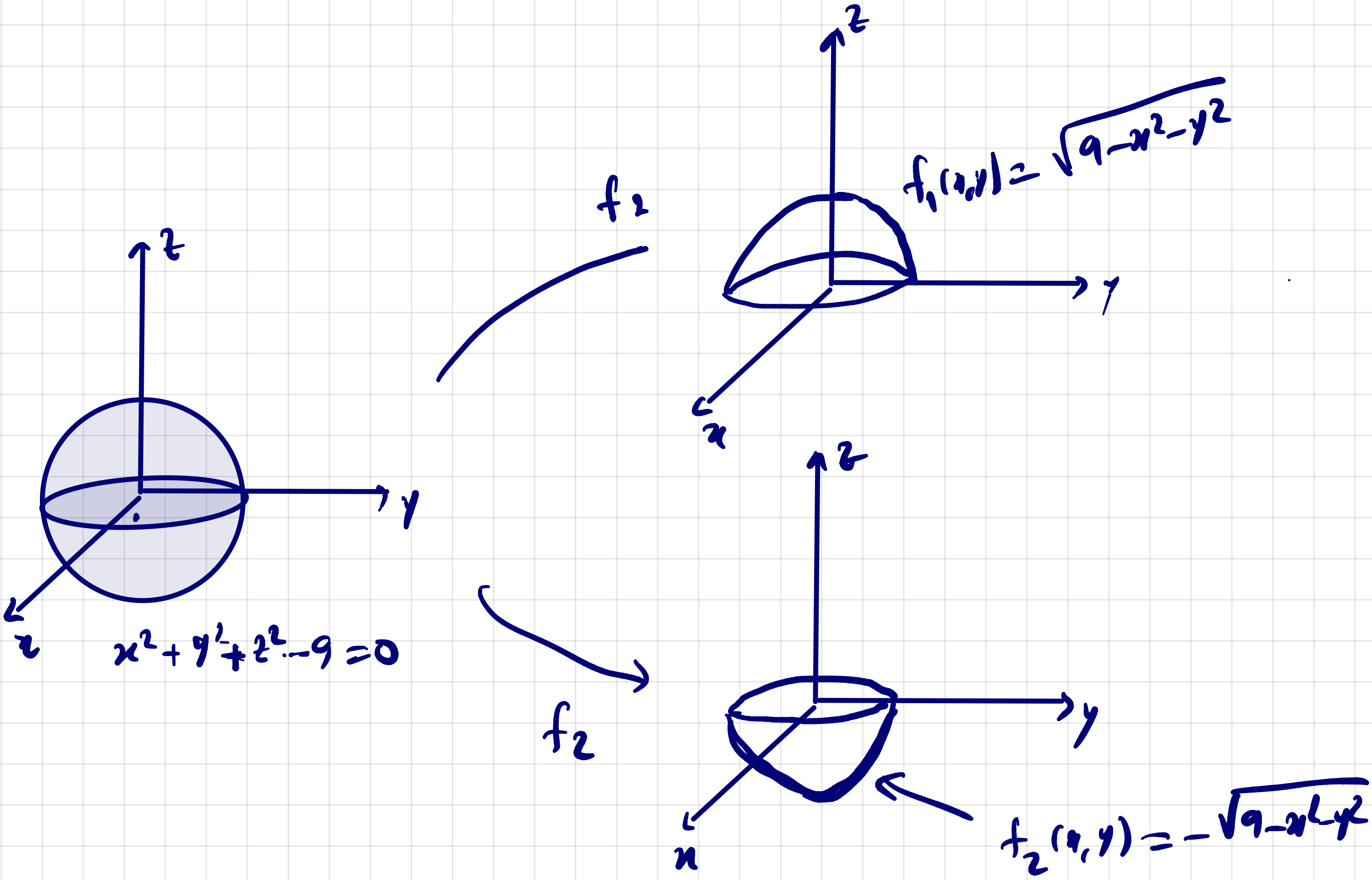
Podemos explicitar uma das variáveis. Por exemplo:

$$z^2 = 9 - x^2 - y^2 \rightarrow z = \pm\sqrt{9-x^2-y^2}$$

Logo, S fica decomposta em duas partes:

$$f_1(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$$

$$f_2(x,y) = -\sqrt{9-x^2-y^2}$$

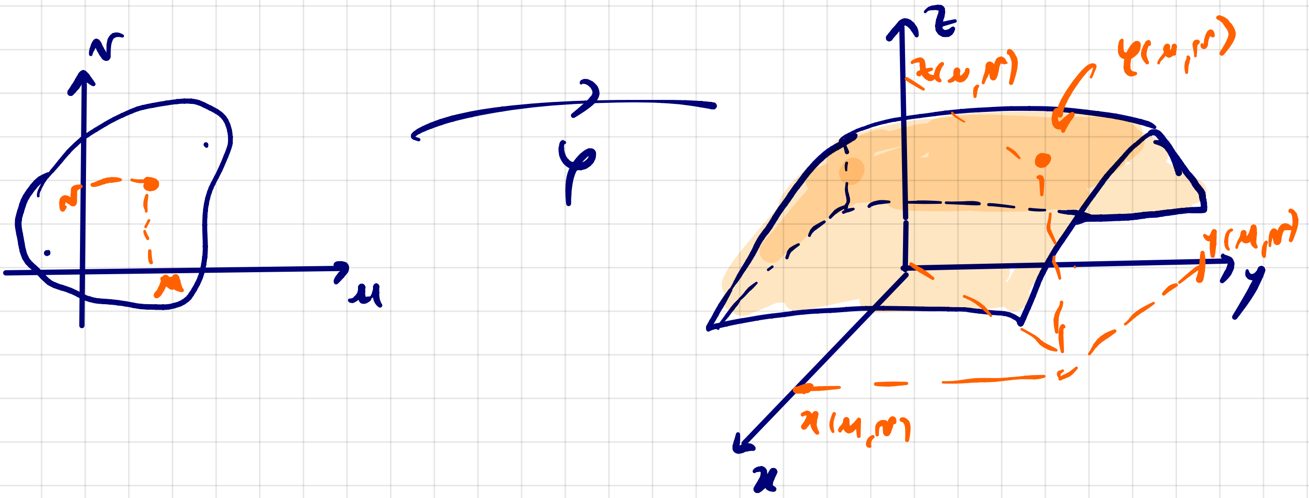


Seja $f(x,y,z)=0$ uma superfície S.

Uma parametrização para f será uma função

$$\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad - \ \Omega \text{ região convexa.}$$

$$\varphi(u,v) = \big(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\big)$$



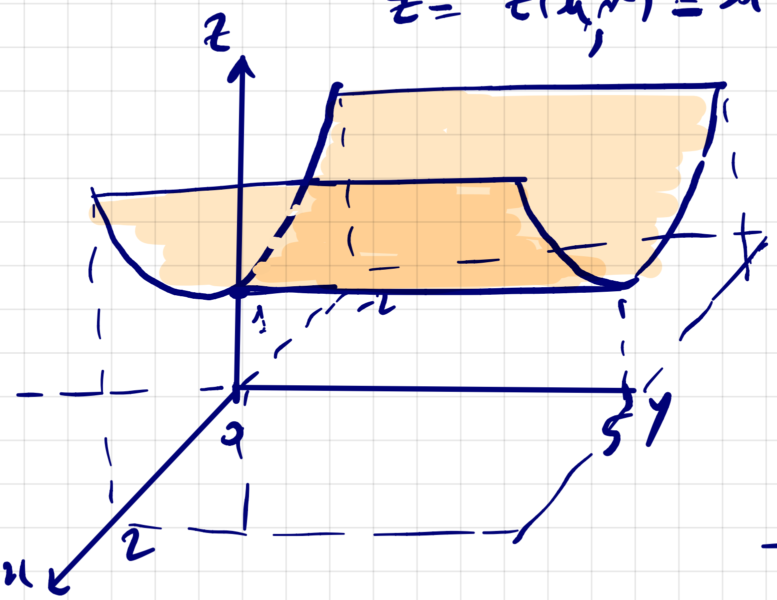
Ex.: $\varphi(u,v) = (u,\ v,\ u^2+1)$; $-2 \leq u \leq 2$; $0 \leq v \leq 5$

Qual é a superfície dada por esta parametrização?

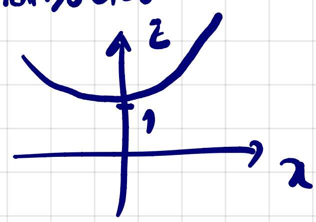
Solução:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(u,v) = u \\ y &= y(u,v) = v \\ z &= z(u,v) = u^2+1 \end{aligned}\right\} \quad z = x^2+1$$

$y = v$ (livre na var. y)



Cilindro parabólico.



$0 \leq v = y \leq 5$

$-2 \leq u = x \leq 2$