06/09/23 – AULA 21

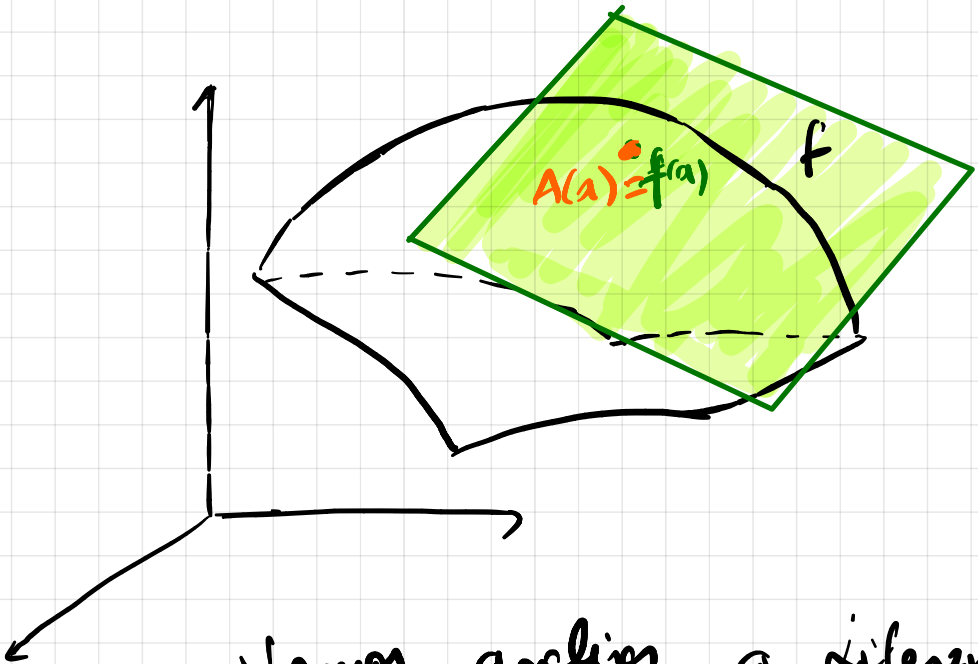
DIFERENCIABILIDADE NO $\mathbb{R}^m$.

Seja $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}^m$. A ideia da diferenciabilidade é aproximar a f no ponto a por uma função afim $A: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$,

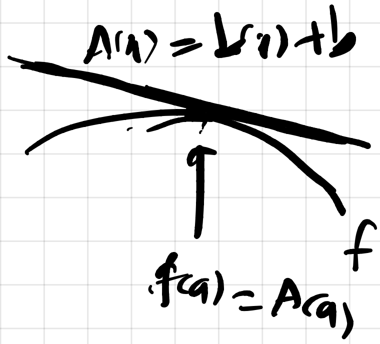
$$A(x) = L(x) + b, \quad \to \boxed{\text{HIPERPLANO.}}$$

onde $L: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ será uma transformação linear.

Ou seja, queremos que $A(x)$ seja uma aproximação para f no ponto a. Para isso, vamos impor que $A(a) = f(a)$ $(*)$



VISTA TRANSVERSAL



Vamos analisar a diferença:

$$\underline{A(x) - A(a)} = L(x) + b - (L(a) + b)$$

$$= L(x) + \cancel{b} - L(a) - \cancel{b} = L(x) - L(a) =$$

$$= \underline{L(x-a)}$$

L é linear.

$$\Rightarrow A(x) - A(a) = L(x-a)$$

$$\Rightarrow A(x) = \underbrace{A(a)}_{= f(a),\ \text{por } (*)} + L(x-a)$$

Logo, $\boxed{A(x) = f(a) + L(x-a)}$ $(**)$

Como queremos que $A(x)$ seja aproximação para $f(x)$ em $x=a$, devemos ter:

$$\lim_{x\to a} f(x) - A(x) = 0 \quad (\mathrm{II})$$

Disso:

$$0 = \lim_{x\to a} f(x) - A(x) = \lim_{x\to a} f(x) - [f(a) + L(x-a)]$$

$$= \lim_{x\to a} f(x) - f(a) - \lim_{x\to a} L(x-a)$$

$$= \lim_{x\to a} f(x) - f(a) - \underbrace{L(0)}_{=0}$$

, pois L é uma TRANSF. LINEAR.

conclusão: $\lim_{x\to a} (f(x) - f(a)) = 0$,

ou seja, f fica contínua com essa aproximação

Observando (II) temos que $f(x) \approx A(x)$ em $x = a$. Então, combinando com $(**)$, redefinimos a $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ pondo

$$f(x) = \underbrace{f(a) + L(x-a)}_{A(x)} + \|x-a\| \cdot r(x-a),$$

onde $r(x-a) \to 0$ mais rápido do que $\|x-a\| \to 0$; ou seja;

$$\lim_{x \to a} \frac{r(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

Obs: $\|x-a\| = d(x,a)$

Com isso, observamos que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x-a\|} = \lim_{x \to a} \frac{\cancel{\|x-a\|} \cdot r(x-a)}{\cancel{\|x-a\|}}$$

$$= \lim_{x \to a} r(x-a) = 0$$

POR EXIGÊNCIA.

Isto motiva definir:

Def.: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}^m$.

Dizemos que f é diferenciável em a se:

(i) $a \in \operatorname{int}(\Omega)$;

(ii) $\exists\, L: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ transformação linear

tal que
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$$

Neste caso, dizemos que $L: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é

é a diferencial de f no ponto a, e

escrevemos $L = d_a f$.

Seja $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ base canônica do $\mathbb{R}^m$, onde

$$e_i = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots 0)$$

↳ NA POSIÇÃO i

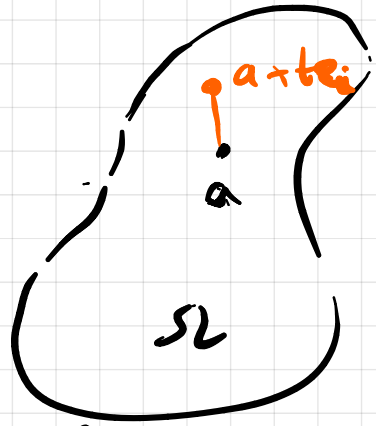
[POR EXEMPLO, NO $\mathbb{R}^3$, TEMOS $\{e_1, e_2, e_3\}$, ONDE

$e_2 = (0, 1, 0)$

$e_1 = (1, 0, 0)$; $e_3 = (0, 0, 1)$]

Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$; dado t suficientemente pequeno tal que $x_i = a + t \cdot e_i \in \Omega$.

$(a \in \Omega \subset \mathbb{R}^m)$



Suponha f diferenciável em a. Vamos aplicar a def. de diferenciabilidade no ponto x_i:

$$0 = \lim_{x_i \to a} \frac{f(x_i) - f(a) - L(x_i - a)}{\|x_i - a\|}$$

Note que $x_i = a + t \cdot e_i$.

Logo, $t \to 0$ quando $x_i \to a$. Assim:

$$0 = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t \cdot e_i) - f(a) - L(\cancel{a} + t \cdot e_i \cancel{-a})}{\|\cancel{a} + t \cdot e_i \cancel{-a}\|}$$

$$0 = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+t \cdot e_i) - f(a) - L(t \cdot e_i)}{\|t \cdot e_i\|} \Longrightarrow$$

$\|t \cdot e_i\| = |t| \cdot \underbrace{\|e_i\|}_{\to 1} = t$

$L(t \cdot e_i) = t \cdot L(e_i)$ [L é linear]

$$\Rightarrow \quad 0 = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+te_i) - f(a)}{t} - \frac{\cancel{t} \cdot L(e_i)}{\cancel{t}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{t \to 0} \frac{f(a+t \cdot e_i) - f(a)}{t}}_{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)} = L(e_i) = d_{e_i} f(a)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = (d_{e_i} f)(a)$$

Lembrando da álgebra linear, sendo $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear, em relação à base canônica $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ do $\mathbb{R}^m$, tem-se uma matriz $[L]_{n \times m}$.

Então, sendo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = d_{e_i} f(a) = L(e_i)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_i} \end{bmatrix}$$

COLUNA i DA MATRIZ L DA TRANSF. LINEAR.

Sendo $f = (f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n)$, $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, diferenciável em $a \in \text{int}(\Omega)$, obtemos a matriz:

$$
d_a f := [L]_{m\times n} = \begin{bmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_3}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a)
\end{bmatrix}_{m\times n},
$$

e é chamada de MATRIZ JACOBIANA DE f NO PONTO a.

O que está exposto acima constitui a prova do seguinte teorema:

TEOREMA: Se $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável no ponto $a \in int(\Omega)$, então, o diferencial de f no ponto a, $d_a f$, nas bases canônicas, é a matriz jacobiana de f acima determinada.

Obs.: A unicidade da diferenciabilidade em um ponto está garantida devido à unicidade da representação da matriz de uma transf. linear numa dada base.

Ex: Seja $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y,z) = (x^2 \operatorname{sen} y,\ x y^2 z^3)$$

Determine $d_a f$. (ou seja, a matriz Jacobiana)

Solução:

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$d_a f = [L]_{2\times 3}$$

$$f_1 = x^2 \operatorname{sen} y$$

$$f_2 = x y^2 z^3$$

$$d_a f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x \operatorname{sen} y & x^2 \cos y & 0 \\ y^2 z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2 \end{bmatrix}$$

Proposição: Se f é diferenciável em um ponto a, então f é contínua nesse ponto.

DEMONSTR.: Note que, sendo f diferenciável,

$$f(x) = f(a) + L(x-a) + \|x-a\| \cdot r(x-a)$$

$$\Rightarrow f(x) - f(a) = L(x-a) + \|x-a\| \cdot r(x-a)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) - f(a) = \lim_{x \to a} \underbrace{L(x-a)}_{\to L(0) = 0} + \underbrace{\|x-a\| \cdot r(x-a)}_{\to 0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

$\square$