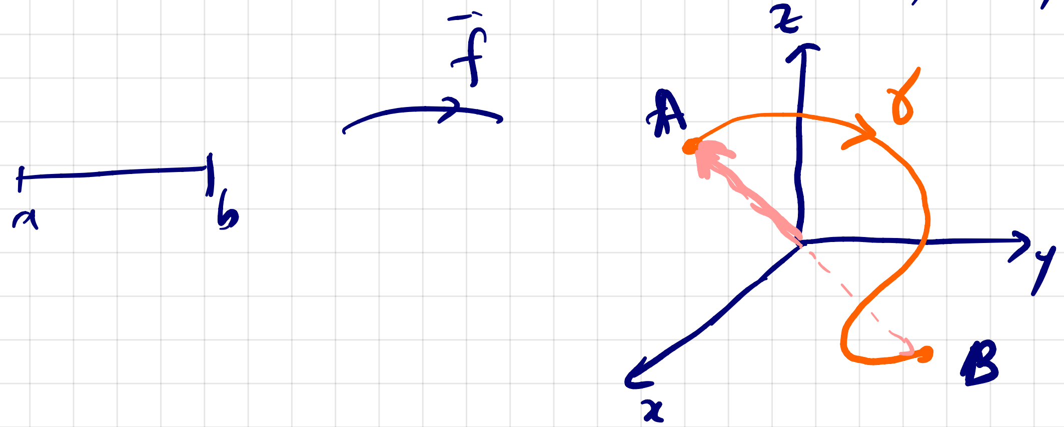
22/09/23 – AULA 25

CÁLCULO DO COMPRIMENTO DE UMA CURVA DO $\mathbb{R}^3$.

Dada $\vec{f}: [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $\vec{f}(t) = (x(t), y(t), z(t))$



O gráfico de $\vec{f}$, em $\mathbb{R}^3$ é uma curva γ.
Tome $A = \vec{f}(a)$ e $B = \vec{f}(b)$
O comprimento da "ℓ" curva γ é obtido pela fórmula

$$\ell = \int_a^b \|\vec{f}'(t)\| \, dt$$

Sua demonstração não é dada em um curso de cálculo, no máximo é mostrada uma ideia da prova...

EX's LISTA 07.

09) (a) $\vec{f}(t) = (\underset{\text{M.N}}{e^t \cos t}, \underset{\text{M.N}}{e^t \operatorname{sen} t}, e^t)$; $0 \leq t \leq 1$.

SOLUÇÃO: $\ell = \int_0^1 \|\vec{f}'(t)\| \, dt$; onde:

$$\vec{f}'(t) = \left(e^t \cdot (-\text{sen}\,t) + e^t \cdot \cos t,\ e^t \cdot \cos t + e^t \cdot \text{sen}\,t,\ e^t\right)$$

Assim:

$$\|\vec{f}'(t)\| = \sqrt{\left(e^t\cos t - e^t\,\text{sen}\,t\right)^2 + \left(e^t\cos t + e^t\,\text{sen}\,t\right)^2 + \left(e^t\right)^2}$$

$$= \sqrt{e^{2t}\cdot(\cos t - \text{sen}\,t)^2 + e^{2t}\cdot(\cos t + \text{sen}\,t)^2 + e^{2t}}$$

$$= \sqrt{e^{2t}\cdot\Big[\underbrace{\cos^2 t + \text{sen}^2 t}_{=1} \cancel{- 2\,\text{sen}\,t\cos t} + \underbrace{\cos^2 t + \text{sen}^2 t + 1}_{=2} \cancel{+ 2\,\text{sen}\,t\cos t}\Big]}$$

$$= \sqrt{\left(e^t\right)^{2}\left[1 + 1 + 1\right]} = \sqrt{3}\cdot e^t$$

Portanto, temos:

$$\ell = \int_0^1 \|\vec{f}'(t)\|\,dt = \int_0^1 \sqrt{3}\cdot e^t\,dt$$

$$= \sqrt{3}\cdot\int_0^1 e^t\,dt = \sqrt{3}\cdot e^t\Big|_0^1$$

$$= \sqrt{3}\cdot\left(e^1 - e^0\right) = \underline{\sqrt{3}\cdot(e-1)}$$

RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS DAS LISTAS

LISTA 07)

08) $f(t)$ - função escalar tal que $\exists\, f'(t)$ e $\exists\, f''(t)$

$\vec{u}$, $\vec{v}$ vetores constantes em $\mathbb{R}^3$.

Defina $\vec{g}(t)$ por

$$\vec{g}(t) = \vec{u} + \vec{v} \cdot f(t)$$

Mostrar:

$$\vec{g}'(t) \times \vec{g}''(t) = \vec{0}$$

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$; $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ (dados)

$$\Rightarrow \vec{g}(t) = \vec{u} + \vec{v} \cdot f(t)$$

$$= (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) \cdot f(t)$$

$$\vec{g}(t) = \left(u_1 + v_1 \cdot f(t),\ u_2 + v_2 \cdot f(t),\ u_3 + v_3 \cdot f(t)\right)$$

Disso, derivando, obtemos:

$$\vec{g}'(t) = \left(v_1 \cdot f'(t),\ v_2 \cdot f'(t);\ v_3 \cdot f'(t)\right).$$

E, derivando $\vec{g}'$, vem:

$$\vec{g}''(t) = \left(v_1 \cdot f''(t),\ v_2 \cdot f''(t),\ v_3 \cdot f''(t)\right)$$

Assim, teremos:

$$\underline{\vec{g}'(t) \times \vec{g}''(t)} = \left| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_1 \cdot f' & r_2 \cdot f' & r_3 \cdot f' \\ r_1 \cdot f'' & r_2 f'' & r_3 \cdot f'' \end{matrix} \right| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ r_1 \cdot f' & r_2 \cdot f' \\ r_1 \cdot f'' & r_2 f'' \end{matrix}$$

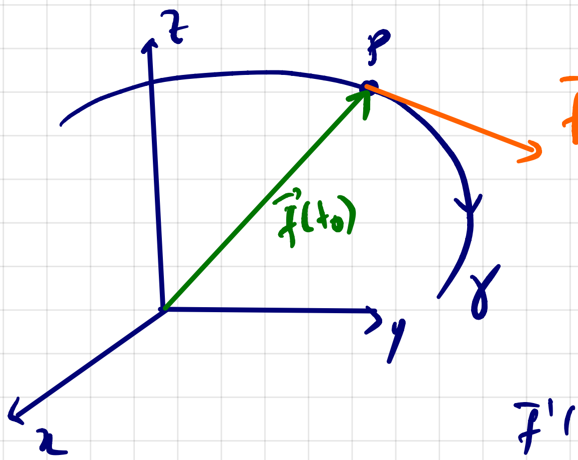
$$= \left(r_2 r_3 \cdot f' \cdot f'' - r_2 r_3 f' f'' ,\ r_1 r_3 f' f'' - r_1 r_3 f' f'' ,\ r_1 \cdot r_2 \cdot f' f'' - r_1 \cdot r_2 f' f'' \right)$$

$$= (0, 0, 0) = \vec{0}.$$

LISTA 07

04) (c) $\vec{f}(t) = (2t, \ln t, 2)$; $P(2, 0, 2)$

vetor tangente ao gráfico de $\vec{f}$ no ponto P.



$\vec{f}'(t_0)$; onde

$\vec{f}(t_0) = P$

$\vec{f}'(t) = (x, y, z)$

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = \ln t \\ z = 2 \end{cases}$$

$P(2, 0, 2)$

$\vec{f}'(t) = \left(2, \frac{1}{t}, 0\right)$

Note que:

$\vec{f}(t_0) = P$. Assim

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2 = 2t \rightsquigarrow t=1 \\ y = 0 = \ln t \rightsquigarrow t=1 \\ z = 2 = 2 \quad \text{ok!} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

conclusão: $t_0 = 1$

Portanto, o vetor tangente ao gráfico de $\vec{f}$ em P será dado por $\vec{f}'(1)$, i.e.,

$$\vec{f}'(1) = \left(2, \frac{1}{1}, 0\right) = (2, 1, 0)$$

LISTA 04.

01) $X = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f$ é contínua$\}$

$\varphi : [0,1] \to (0, +\infty)$ cont.

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| \cdot \varphi(x)\, dx.$$ Mostrar: (X, d) é espaço métrico.

Para isto, que $d : X \times X \to [0, +\infty)$ dada acima é uma métrica em X. Dados $f, g, h \in X$, temos:

(1) POSITIVIDADE:

$$d(f,g) = \int_0^1 \underbrace{|f(x) - g(x)|}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\varphi(x)}_{> 0} dx \geq 0.$$

↳ pois $Im(\varphi) = (0, +\infty)$

Além disso:

$$d(f,g)=0 \iff \int_0^1 |f(x)-g(x)|\cdot \underbrace{\varphi(x)}_{>0}\,dx = 0$$

$$\iff |f(x)-g(x)|=0 \iff f(x)=g(x)$$

$$\iff f=g.$$

(ii) SIMETRIA: $d(f,g) = d(g,f)$.

De fato:

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x)-g(x)|\cdot\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int_0^1 |g(x)-f(x)|\cdot\varphi(x)\,dx = d(g,f).$$

(iii) DESIGUALDADE TRIANGULAR: $d(f,g) \leq d(f,h)+d(h,g)$:

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x)-g(x)|\cdot\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left|\big(f(x)-h(x)\big)+\big(h(x)-g(x)\big)\right|\cdot\varphi(x)\,dx \leq$$

$$\leq \int_0^1 \big(|f(x)-h(x)| + |h(x)-g(x)|\big)\cdot\varphi(x)\,dx =$$

DESIGUALDADE TRIANGULAR DO MÓDULO

$$= \int_0^1 |f(x)-h(x)|\cdot\varphi(x)\,dx + \int_0^1 |h(x)-g(x)|\cdot\varphi(x)\,dx$$

$$= d(f,h) + d(h,g)$$

LISTA 05:

01) (d) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

$D(f) = ?$ $\quad 1-x^2-y^2 > 0$

$x^2+y^2 < 1$

$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 < 1\}$

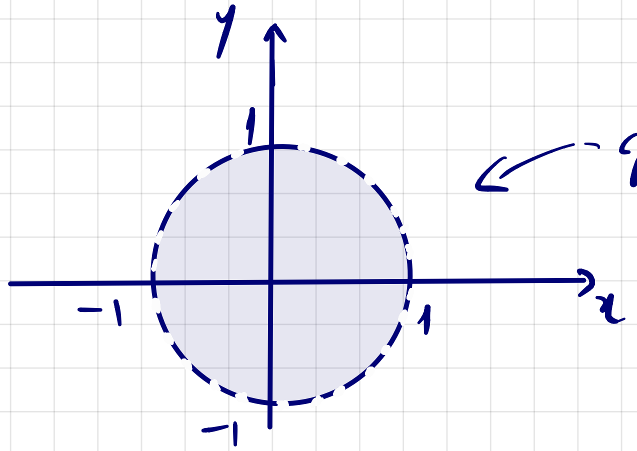


gráfico do domínio

LISTA 05

13) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2,\ x+y+z)$

obtenha o conj. γ tal que $f(x,y,z) = (2,1)$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 2 \\ x+y+z = 1 \end{cases}$$

$$z = 1-x-y$$

ou seja, será a interseção entre a esfera $x^2+y^2+z^2=2$ e o plano $x+y+z=1$, que vai resultar numa circunferência:

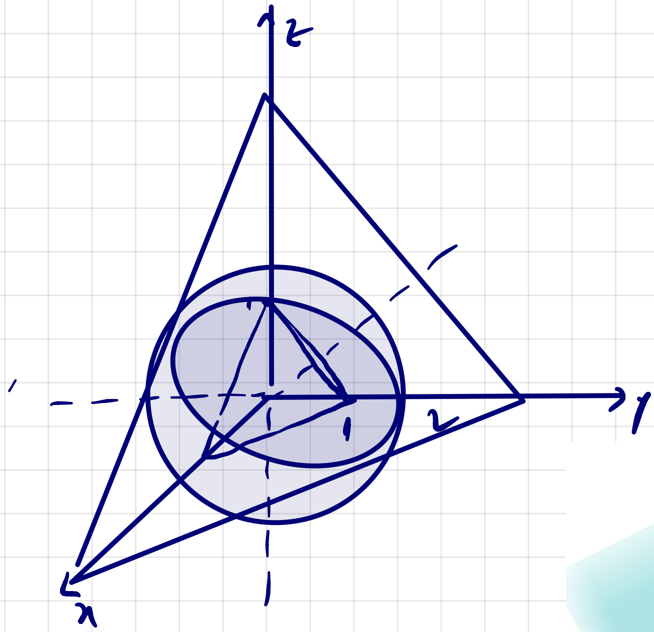
$$x^2+y^2+z^2=2$$

$$x^2+y^2+(1-x-y)^2=2$$

$$x^2+y^2+(1-x)^2-2\cdot(1-x)\cdot y+y^2=2$$

$$x^2+y^2+1-2x+x^2-2y+2xy+y^2=2$$

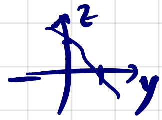
$$2x^2+2y^2-2x+2xy=1 \qquad (\gamma)$$

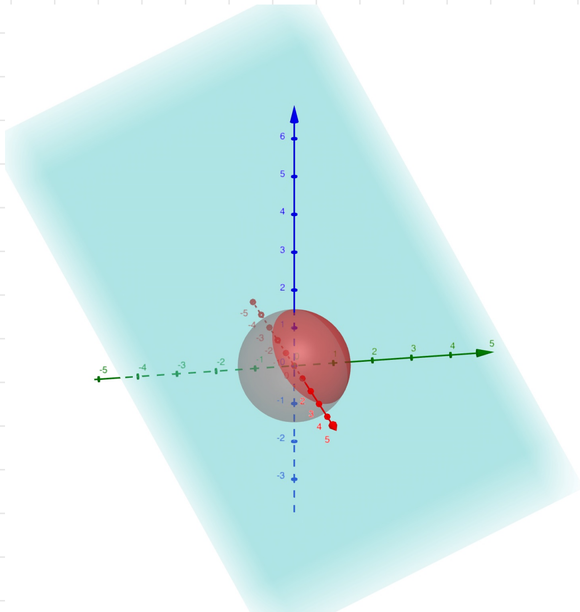


$x+y+z=1$

• $x=0$:

$y=1-z$



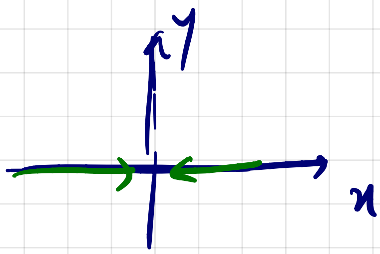


LISTA 06

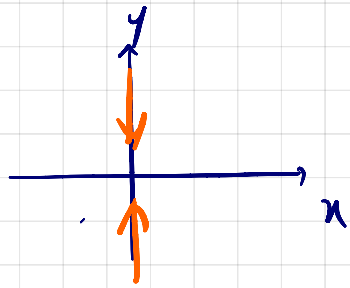
02) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Vamos mostrar que

$$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

- $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{-y^2}{y^2} = -1.$



- $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{x^2}{x^2} = 1.$



Como por dois caminhos diferentes encontramos limites diferentes, concluímos que $\nexists \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

LISTA 06 |

08) Admitindo que $2|xy| - \dfrac{x^2y^2}{6} < 4 - 4\cos\sqrt{|xy|} < 2|xy|$

calcular $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4-4\cos\sqrt{|xy|}}{|xy|}$.

Solução: Vamos usar o T. do Sanduíche. Pela desigualdade dada:

$$2|xy| - \frac{x^2y^2}{6} < 4 - 4\cos\sqrt{|xy|} < 2|xy| \qquad \div\ |xy| \neq 0$$

$$\frac{2\cancel{|xy|}}{\cancel{|xy|}} - \frac{x^2y^2}{6.|xy|} < \frac{4-4\cos\sqrt{|xy|}}{|xy|} \leq \frac{2.\cancel{|xy|}}{\cancel{|xy|}}$$

$$2 - \frac{|x|^2.|y|^2}{6|xy|} < \frac{4-4\cos\sqrt{|xy|}}{|xy|} \leq 2$$

pois $|x|^2 = x^2$,
$|y|^2 = y^2$

$$\Rightarrow \underbrace{2 - \frac{|xy|^{\cancel{2}}}{6.\cancel{|xy|}}}_{\substack{\downarrow \\ 2 \\ (x,y)\to(0,0)}} < \frac{4-4\cos\sqrt{|xy|}}{|xy|} \leq \underset{\substack{\downarrow \\ 2 \\ (x,y)\to(0,0)}}{2}$$

$\Downarrow$ T. do sanduíche

$$\frac{4-4\cos\sqrt{|xy|}}{|xy|} \longrightarrow 2$$
$(x,y)\to(0,0)$

LISTA 08

10)

(b) $f(x,y) = e^{-2y}.\cos 2x$

f é harmônica?

Precisamos verificar se $\Delta f = 0$, onde:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

- $$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-2y} \cdot (-\operatorname{sen} 2x) \cdot 2 = -2\, e^{-2y} \cdot \operatorname{sen} 2x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -2 e^{-2y} \cdot \cos 2x \cdot 2$$

$$= -4 e^{-2y} \cos 2x$$

- $$\frac{\partial f}{\partial y} = -2 \cdot e^{-2y} \cdot \cos 2x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = +4 \cdot e^{-2y} \cdot \cos 2x$$

Então:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4 e^{-2y} \cos 2x + 4 e^{-2y} \cos 2x = 0$$

$\Rightarrow \Delta f = 0$, i.e., f é harmônica.