15/09/23 – AULA 24

DERIVADA DIRECIONAL E O VETOR GRADIENTE:

Def.: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ (ou seja, f é uma função escalar). Seja $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$ um vetor unitário(*), ou seja, tal que $\|\vec{u}\| = 1$. Dado $a \in \text{int}(\Omega)$, definimos a derivada direcional de f, na direção do vetor $\vec{u}$, no ponto a, por

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = D_{\vec{u}} f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t.\vec{u}) - f(a)}{t}$$

Ex.: Em $\mathbb{R}^2$, dado $a = (x_0, y_0)$ e tomando $\vec{u} = \vec{i} = (1,0)$, que é tal que $\|\vec{u}\| = \|\vec{i}\| = 1$, temos, para $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = \frac{\partial f}{\partial \vec{i}}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t.\vec{i}) - f(a)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f((x_0, y_0) + t.(1,0)) - f(x_0, y_0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{i}}(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)}$$

(*) Um vetor $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$ possui módulo $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_m^2}$

Do mesmo modo se conclui que

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{j}}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a)}$$

Conclusão: as derivadas parciais são derivadas direcionais, nas direções dos vetores

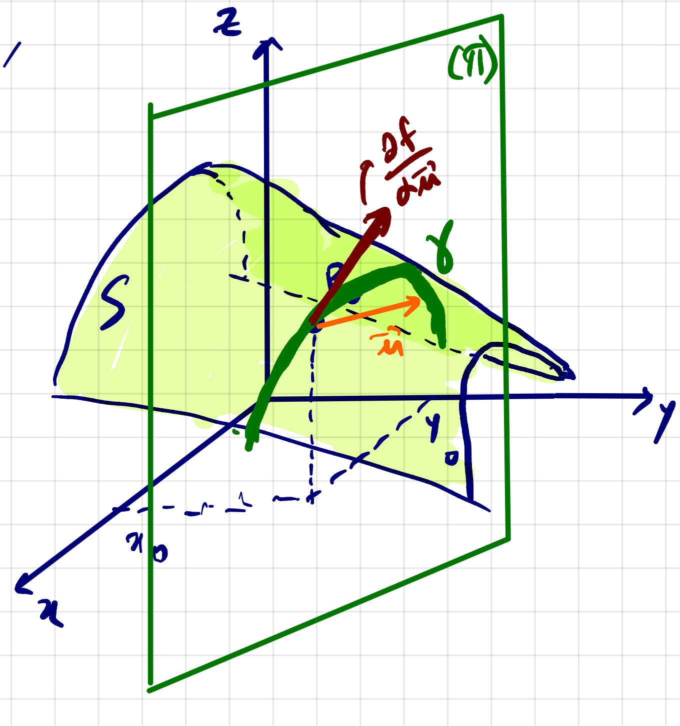
$$e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots 0),$$

POSIÇÃO i

da base canônica do $\mathbb{R}^n$.

De modo geral, no caso $\mathbb{R}^2$, i.e., $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dado $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\|\vec{u}\| = 1$, tome $a(x_0, y_0)$. Tome $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in S$, onde S é a superfície dada pelo gráfico de f. Então, $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P_0)$ vai representar a inclinação da reta tangente à curva γ determinada pelo plano (π) que passa em P_0 e é paralelo a $\vec{u}$.

$$\gamma = (\pi) \cap S$$



(SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DA DERIVADA DIRECIONAL)

Ex.: $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 y$

Determine $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}$, sendo $\vec{u} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Solução: Note que $\vec{u}$ é unitário:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1.$$

Então:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\overbrace{(x,y)}^{a} + \overbrace{t\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}^{t\vec{u}}) - f(\overbrace{x,y}^{a})}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f\left(x - \frac{1}{2}t, y + \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - f(x,y)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\left(x - \frac{t}{2}\right)^2 \cdot \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - x^2 y}{t} =$$

$f(x,y) = x^2 y$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\left(x^2 - tx + \frac{t^2}{4}\right)\left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - x^2 y}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{x^2 y} - txy + \frac{t^2}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2}tx^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}t^2 x + \frac{\sqrt{3}}{8}t^3 - \cancel{x^2 y}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t}\cdot\left(-xy + \frac{t}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}tx + \frac{\sqrt{3}}{8}t^2\right)}{\cancel{t}}$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(-xy + \underbrace{\frac{t}{4}y}_{0} + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 \underbrace{- \frac{\sqrt{3}}{2}tx}_{0} + \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{8}t^2}_{0}\right)$$

$$= \underline{-xy + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = -xy + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2}$$

Felizmente, há uma forma mais simples de calcular $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}$, c.f. o teorema a seguir:

TEOREMA: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ função diferenciável, $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$ vetor unitário e $a \in \operatorname{int}(\Omega)$. Então,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = \underbrace{f'(a)}_{d_a f} \cdot \vec{u}$$

PRODUTO ESCALAR

DEMONSTRAÇÃO:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a) = \lim_{t\to 0}\frac{f(a+t\vec{u}) - f(a)}{t} =$$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\cdot h + \|h\|\cdot r(h), \quad \text{com } \lim_{h\to 0} r(h) = 0$$

$$(d_a f) = f'$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f'(a).(t\vec{u}) + \|t.\vec{u}\| . r(t\vec{u})}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f'(a).(\cancel{t}.\vec{u})}{\cancel{t}} + \underbrace{\lim_{t \to 0} \underbrace{\frac{|t|}{t}. \overbrace{\|\vec{u}\|}^{=1}}_{\text{LIMITADA}} . \underbrace{r(t\vec{u})}_{\to 0}}_{\to 0}$$

$$= \underset{\sim\sim\sim}{f'(a).\vec{u}}$$

$\square$

Note que, $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$, então,

$$f'(a) = \left[d_a f\right]_{1 \times m} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\right]_{1 \times m}$$

Def.: Dada $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ diferenciável, definimos o vetor gradiente de f por:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}\right)$$

Por exemplo, se $f(x,y,z) = x^2 y z^3 + x$, então:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$= \left(2xyz^3 + 1,\ x^2 z^3,\ 3x^2 y z^2\right)$$

De posse dessa definição, pelo Teorema acima, concluímos que:

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a)} = f'(a)\cdot\vec{u} = \underbrace{\nabla f(a)\cdot\vec{u}}$$

Isso vai tornar o cálculo da derivada direcional mais simples. Voltando ao exemplo dado na def. de derivada direcional:

$$f(x,y) = x^2 y \quad ; \quad \vec{u} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \; ; \; \|\vec{u}\| = 1.$$

Logo:

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x,y)} = \nabla f(x,y)\cdot\vec{u}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= (2xy, x^2)\cdot\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \underbrace{-xy + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2}$$

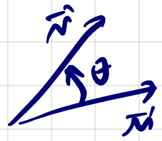
Toda derivada representa uma taxa de variação. Em particular, as derivadas direcionais. Isto posto, temos o seguinte resultado:

TEOREMA: Seja $f:\Omega\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ diferenciável. Então, a taxa de variação da derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}$ será máxima em $\|\nabla f\|$ e ocorre quando $\vec{u}$ possui a mesma direção que o vetor gradiente ∇f.

DEMONSTRAÇÃO: Basta notar que:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \nabla f\cdot\vec{u} = \|\nabla f\|\cdot\underbrace{\|\vec{u}\|}_{=1}\cdot\cos\theta = \|\nabla f\|\cdot\cos\theta.$$

$$\vec{v}\cdot\vec{u} = \|\vec{v}\|\cdot\|\vec{u}\|\cdot\cos\theta$$



e este valor será máximo quando $\cos\theta = 1$, ou seja, quando $\theta = 0$, o que significa que o vetor $\vec{u}$ e ∇f possuem mesmo sentido.

Conclusão:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \|\nabla f\| \text{ (valor máximo)},$$ se $\vec{u}$ e ∇f tiverem mesma direção.

$\square$

EX.: Seja $f(x,y) = x\cdot e^{y}$.

(a) Determine a taxa de variação de f no ponto $P(2,0)$ na direção de P até $Q\left(\frac{1}{2},2\right)$

(b) Em que direção f tem a máxima taxa de variação? Qual é essa máxima taxa de variação?

solução:

(a) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}$, sendo $\vec{PQ} = Q - P$

$$= \left(\tfrac{1}{2}, 2\right) - (2,0)$$

$$= \left(-\tfrac{3}{2}, 2\right)$$

$$\|\vec{PQ}\| = \sqrt{\tfrac{9}{4} + 4} = \tfrac{5}{2}$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{PQ}}{\|\vec{PQ}\|} \quad \text{(Para ser unitário)}$$

$$\vec{u} = \tfrac{2}{5} \cdot \left(-\tfrac{3}{2}, 2\right) = \left(-\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P) = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(2,0) = \nabla f(2,0) \cdot \vec{u},$$

sendo $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(e^y, x \cdot e^y\right)$

$$\Rightarrow (\nabla f)(2,0) = \left(e^0, 2 \cdot e^0\right) = (1,2)$$

Portanto, $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P) = \nabla f(2,0) \cdot \vec{u}$

$$= (1,2) \cdot \left(-\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}\right) =$$

$$= 1\left(-\tfrac{3}{5}\right) + 2 \cdot \tfrac{4}{5} = -\tfrac{3}{5} + \tfrac{8}{5} = 1.$$

(b) Conforme o teorema anterior, a máxima taxa de variação ocorre em $\|\nabla f(P)\|$, ou seja, como $\nabla f(P) = \nabla f(2,0) = (1,2)$, então:

$$\|\nabla f(P)\| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5},$$

e ocorre na mesma direção de $\vec{u}$.

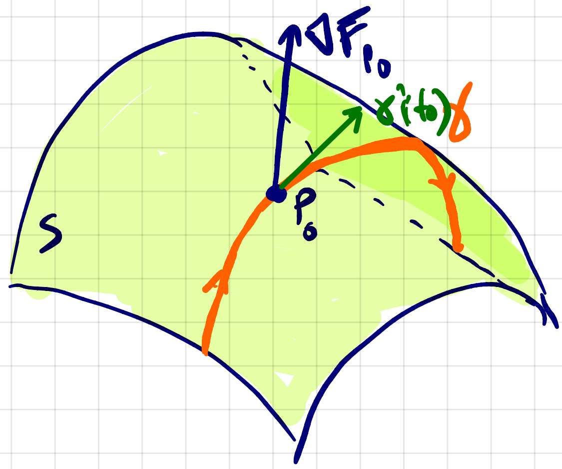
PLANO TANGENTE A UMA SUPERFÍCIE EM UM DADO PONTO:

Seja $z = f(x,y)$, diferenciável. O gráfico de f fornece uma superfície S no $\mathbb{R}^3$, que é equacionada por $F(x,y,z) = 0$, onde

$$F(x,y,z) = f(x,y) - z$$

ou seja, deixando $z = f(x,y)$ na forma implícita.

Seja $P_0(x_0, y_0, f(x_0,y_0)) \in S$



Nosso objetivo é encontrar a eq. do plano tangente à superfície S no ponto $P_0 \in S$.

Seja γ uma curva qualquer em $\mathbb{R}^3$ sobre S, passando por P_0.

Então, $\exists\, t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma(t_0) = P_0(x_0, y_0, \underbrace{f(x_0,y_0)}_{z_0})$

Seja $\nabla F_{P_0} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(P_0), \frac{\partial F}{\partial y}(P_0), \frac{\partial F}{\partial z}(P_0)\right)$

Seja $\gamma'(t_0)$ o vetor tangente à γ em P_0.

$$\gamma'(t_0) = \left(\frac{dx}{dt}(t_0), \frac{dy}{dt}(t_0), \frac{dz}{dt}(t_0)\right)$$

para $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

Além disso;

$$F(x,y,z) \underset{\uparrow}{=} F(x(t), y(t), z(t)) = 0$$

parametrizando.

Derivando em t, no ponto t_0 obtemos; (regra da cadeia)

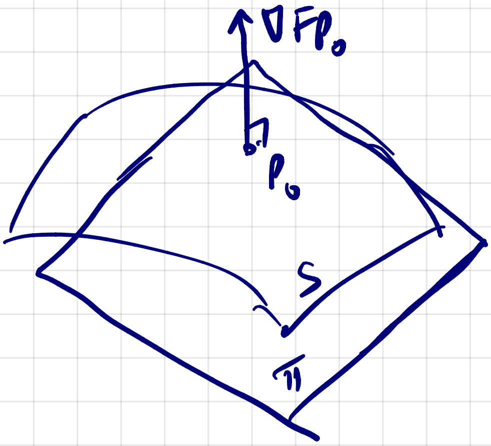
$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}\right|_{t_0} = 0$$

$$\left.\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)\right|_{t_0}\left.\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)\right|_{t_0} = 0$$

$$\nabla F(P_0) \cdot \gamma'(t_0) = 0$$

Ou seja, $\nabla F_P(P_0)$ é ortogonal a $\gamma'(t_0)$

Logo, $\nabla F(P_0)$ serve como vetor normal ao plano que queremos determinar, tangente à S em P_0.



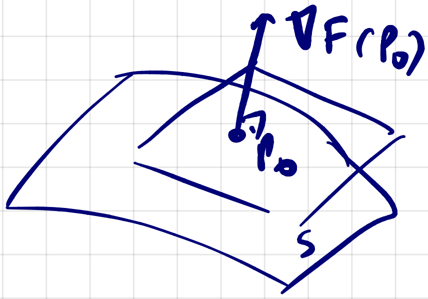
Logo,

$$\nabla F(P_0) \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0,$$

onde $P(x,y,z)$ denota qualquer ponto sobre o plano (π) fornece a eq. do plano (π), tangente à S em P_0.

Ex: Obter a eq. do plano tangente à superfície dada por $f(x,y) = x \cdot e^y$ no ponto $P_0(2,0,2)$

solução:



$$F(x,y,z) = f(x,y) - z$$

$$F(x,y,z) = x e^y - z$$

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = \left(e^y, x \cdot e^y, -1\right)$$

$$\Rightarrow \nabla F(P_0) = \left(e^y, x e^y, -1\right)\Big|_{(2,0,2)} = (1, 2, -1)$$

Dado $P(x,y,z) \in (\pi)$;

$$\overrightarrow{P_0P} = P - P_0 = (x,y,z) - (2,0,2)$$

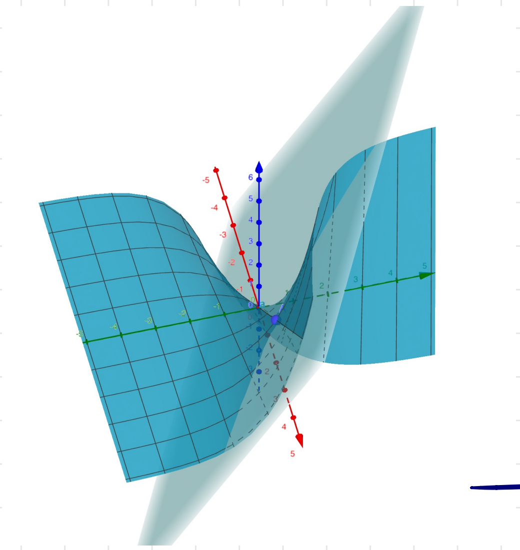
$$= (x-2, y, z-2)$$

Eq. do plano (π): $\nabla F(P_0) \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$

$$(1, 2, -1) \cdot (x-2, y, z-2) = 0$$

$$x - 2 + 2y - (z-2) = 0$$

$$x + 2y - z + 0 = 0$$



(π): $\boxed{x + 2y - z = 0}$

FIM DO CURSO