01/09/23 - AULA 20

Dentre os tópicos estudados na aula anterior, vimos o conceito de derivação parcial.

Dado $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, então:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \quad e$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Outras notações para derivação parcial:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = D_x f = f_x \; ;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = D_y f = f_y \, .$$

Outro exemplo: $f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2) - \sqrt{z}$

$\sqrt{z} \to z^{\frac{1}{2}}$

$D_y f = ?$

$$(\ln r)' = \frac{r'}{r}$$

$$D_y f = \frac{2y}{x^2+y^2+z^2} - 0$$

$D_z f = ?$

$$D_z f = \frac{2z}{x^2+y^2+z^2} - \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}}$$

DERIVADAS SUPERIORES.

Seja $w = f(x,y)$ derivável até a segunda ordem. Definimos:

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$

$$\left\{\begin{array}{l} \bullet\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) \\ \bullet\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) \end{array}\right.$$

Analogamente define-se derivadas de ordem mais alta e também para funções de mais variáveis.

Ex: $w = f(x,y,z)$;

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right) \text{ ; etc.}$$

outras notações:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = D_x^2 f = f_{xx}$$

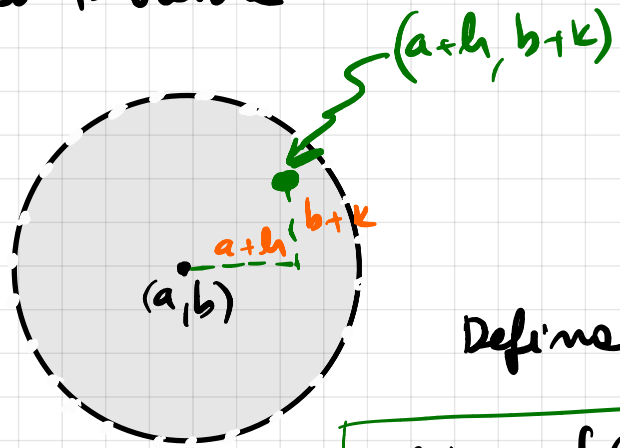
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = D_{xy}^2 f = f_{xy} \quad ; \text{ etc.}$$

2ª DERIVAÇÃO   1ª DERIVAÇÃO

TEOREMA (TEOREMA DE SCHWARZ). Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas parciais f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} contínuas em um disco $B_\delta(a,b) \subset \Omega$.

Então,
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$$

DEMONSTR.: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nas hipóteses do teorema.



Sejam $h, k \in \mathbb{R}$ tais que $(a+h, b+k) \in B_\delta(a,b)$.

Define a função

$$\boxed{g(x) = f(x, b+k) - f(x, b)} \quad (I)$$

g é cont. e derivável entre a e $a+h$, pois f o é.

Então, estamos nas hipóteses do T.V.M $^{(*)}$

Então, $\exists\, c_0$ entre a e $a+h$ tal que

$$g(a+h)-g(a) = g'(c_0)\cdot(\cancel{a}+h-\cancel{a})$$

$$g(a+h)-g(a) = h\cdot g'(c_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{g(a+h)-g(a) = h\cdot\left(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(c_0,b+k)} - \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(c_0,b)}\right)} \quad \text{(II)}$$

Define $u(y) = \frac{\partial f}{\partial x}(c_0,y)$. Pela hipótese do teorema, u é derivável e cont. Então, estamos nas hipóteses do T.V.M. Assim, $\exists\, d_0$ entre b e $b+k$ tal que

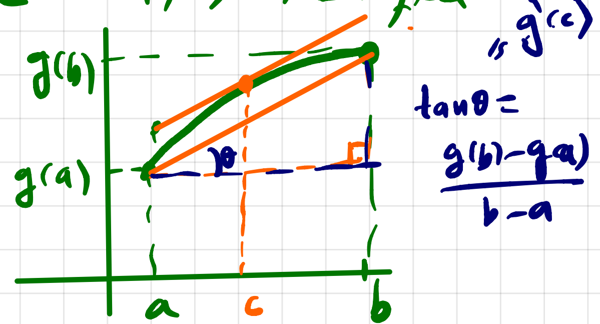
$$u(b+k)-u(b) = u'(d_0)\cdot(\cancel{b}+k-\cancel{b})$$

$$\Rightarrow u(b+k)-u(b) = k\cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(c_0,y)\right)\Bigg|_{y=d_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(b+k)-u(b) = k\cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(c_0,d_0)} \quad \text{(III)}$$

(*) <u>T.V.M</u>: Seja $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b). Então, $\exists\, c\in(a,b)$ tal que

$$g(b)-g(a) = g'(c)\cdot(b-a)$$



De (II) e (III), temos:

$$g(a+h)-g(a) = h\cdot\left(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(c_0,b+k)}_{u(b+k)} - \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(c_0,b)}_{u(b)}\right) =$$

$$h\cdot\left[u(b+k)-u(b)\right] \overset{\text{III}}{=} h\cdot k\cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(c_0,d_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{g(a+h)-g(a) = h\cdot k\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(c_0,d_0)} \qquad (*)$$

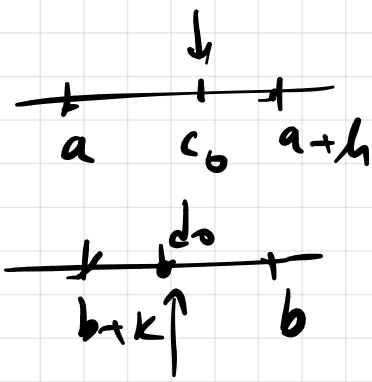
Ainda, de (I), temos:

$$g(a+h) = f(a+h,b+k) - f(a+h,b)$$

$$g(a) = f(a,b+k) - f(a,b)$$

Como c_0 está entre a e $a+h$ e d_0 está entre b e $b+k$, sejam $\theta_1, \theta_2 \in [0,1]$ tais que

$$\begin{cases} c_0 = a + \theta_1 h \\ d_0 = b + \theta_2 k \end{cases}$$



Assim, $(*)$ fica:

$$f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b) =$$

$$= h \cdot k \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a + \theta_1 h, b + \theta_2 k)$$

Dividindo por $k \neq 0$, vamos obter:

$$\underbrace{\frac{f(a+h, b+k) - f(a+h, b)}{k}} - \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k} =$$

$$= \frac{h \cdot \cancel{k}}{\cancel{k}} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a + \theta_1 h, \underbrace{b + \theta_2 k}_{\to 0})$$

Fazendo o limite com $k \to 0$, vamos obter:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial y} f(a+h, b)} - \frac{\partial}{\partial y} f(a, b) = h \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a + \theta_1 h, b)$$

Dividindo por $h \neq 0$, obtemos:

$$\frac{\frac{\partial}{\partial y} f(a+h, b) - \frac{\partial}{\partial y} f(a, b)}{h} = \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a + \underbrace{\theta_1 h}_{0}, b)$$

Fazendo o limite com $h \to 0$, vamos obter:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(a, b)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$$

$\square$

Ex.: $f(x,y) = x^2y^3 + e^{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 + e^{x^2+y^2} \cdot (2x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2xy^3 + 2x e^{x^2+y^2}\right)$$

$$= 6xy^2 + 2x \cdot e^{x^2+y^2} \cdot (2y)$$

$$= 6xy^2 + 4xy e^{x^2+y^2}$$

Por outro lado, derivando primeiro em relação a y e depois em relação a x, deveremos obter mesma resposta. De fato:

$$f(x,y) = x^2y^3 + e^{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 + e^{x^2+y^2} \cdot (2y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2y^2 + 2y \cdot e^{x^2+y^2}\right)$$

$$= 6xy^2 + 2y \cdot e^{x^2+y^2} \cdot 2x$$

$$= 6xy^2 + 4xy \cdot e^{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$ como tinha de ser.

---

obs.: O teorema de SCHWARZ se estende para mais variáveis. Por exemplo, se

$w = f(x, y, z)$;

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x \partial z} = \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial z \partial x},$$

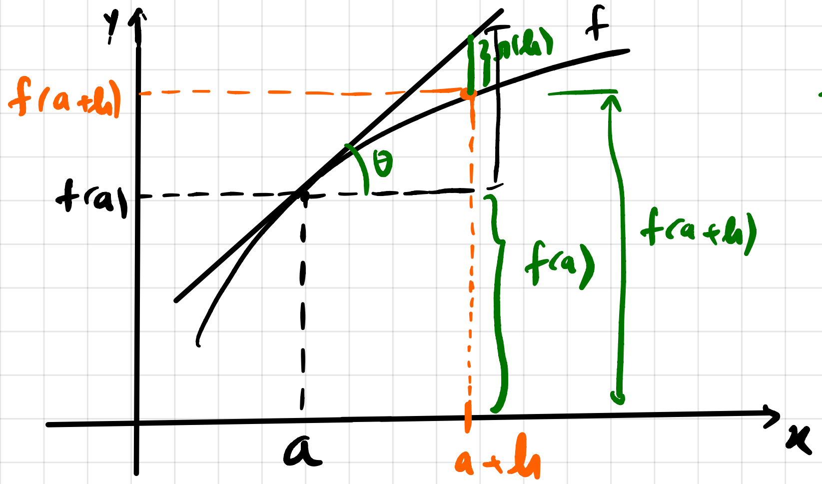
etc., desde que todos contínuos.

DIFERENCIAL DE UMA FUNÇÃO $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

Lembrando do CÁLCULO I, seja $f: I \to \mathbb{R}$, $a \in I'$ um ponto de acumulação do intervalo aberto I, dizemos que f é diferenciável em I, se $\exists\, L \in \mathbb{R}$ tal que, $\forall\, h \in \mathbb{R}$ tal que $a+h \in I$; tivermos:

$$f(a+h) = f(a) + L \cdot h + r(h); \text{ onde}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$



$\tan\theta = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$\downarrow$

$f'(a).h$

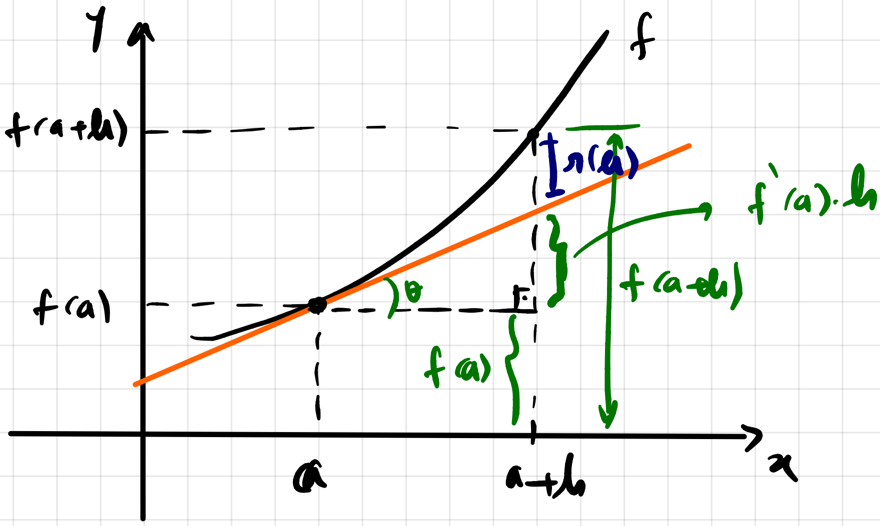
$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + r(h) \quad \& \quad \frac{r(h)}{h} \to 0$$

$$\boxed{L = f'(a)}$$

$$d_a f := L.h = f'(a).h$$

DIFERENCIAL DE f no ponto a.

ou neste caso:



$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + r(h);$$

com $\dfrac{r(h)}{h} \underset{h\to 0}{\to} 0$

O diferencial de f no ponto a é dado por
$$d_a f = L = f'(a).h.$$

ou seja, $d_a f$ é uma aproximação linear de f no ponto a.

Queremos obter uma versão de diferencial em um ponto $a \in \mathbb{R}^m$ para funções $\mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$.

De fato, $d_a f = L$, onde $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ será uma transformação linear.

<u>Obs.:</u> No cálculo I temos, por exemplo o resultado que diz: se f for derivável em ponto, então f é contínua nesse ponto. $\boxed{(*)}$

Será que este resultado vale para várias variáveis?

Por exemplo, seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Neste caso, $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ [exercício]

pois por caminhos diferentes obtemos limites diferentes.

Logo, f não é contínua na origem!

Porém, note que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x \cdot 0}{\Delta x^2 + 0^2} - 0}{\Delta x} = 0 \;;$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{0 \cdot \Delta y}{0^2 + \Delta y^2} - 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0}{\Delta y} = 0$$

conclusão: f não é contínua na origem,

<u>mas</u> $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\exists \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ e são iguais;

o que parece contraditório com $\boxed{(*)}$

Porém, não é contraditório pois o que foi feito acima foi uma comparação envolvendo continuidade e derivação parcial, não entre continuidade e diferenciabilidade, que veremos na próxima aula.

Daí, vai continuar valendo $\boxed{*}$; ou seja,

SE f FOR DIFERENCIÁVEL EM UM PONTO, ENTÃO SERÁ CONTÍNUA NESTE PONTO.