12/09/23

$$f_i = f_i(x_1, \dots, x_m)$$

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \qquad \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

$$d_a f = \begin{bmatrix} f_{11}(a) & f_{12}(a) & f_{13} & \cdots & f_{1m} \\ f_{21}(a) & f_{22}(a) & f_{23} & \cdots & f_{2m} \\ - & - & - & - & - \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & & f_{nm} \end{bmatrix}_{n \times m}$$

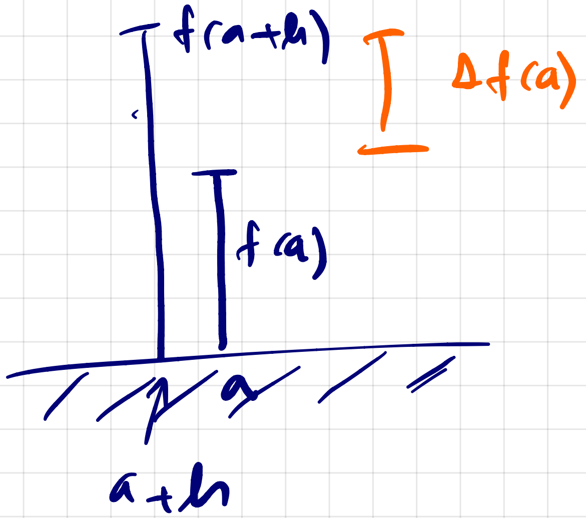
$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

onde $f_{ij} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_3}$$

Def: incremento de $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ em $a \in int(\Omega)$ é:

$$\Delta f(a) = f(a+h) - f(a)$$



Ex.: $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ teremos uma interpretação geométrica para o incremento.

(veja no pdf. da aula)

Podemos redefinir <u>diferenciabilidade</u> em termos do incremento, como segue:

$f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$; Ω - aberto do $\mathbb{R}^m$. $a \in int(\Omega)$.

f será diferenciável em $a \in int(\Omega)$ se, e só se, para $h \in \mathbb{R}^m$; $h = (h_1, h_2, \dots, h_m)$, então

$$\Delta f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot h_2 + \dots \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot h_m + \varepsilon_1 \cdot h_1 + \varepsilon_2 h_2 + \dots$$

$$\dots + \varepsilon_m \cdot h_m \, ;$$

com $\varepsilon_j \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \quad (h_j \to 0)$

Quando $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$ (i.e., $n=1$), ou seja, quando f for uma função escalar, o conceito de diferenciabilidade acima (via incremento) coincide com o conceito que temos de matriz Jacobiana.

De fato: $\quad f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$; então:

$$f(\underline{a+h}) = f(a) + \underbrace{d_a f(h)} + \|h\| \cdot r(h) \, ; \text{ onde}$$

$$f(x) = f(a) + L(x-a) + \|x-a\| \cdot r(x-a)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

$\to x - a = h$

$\Rightarrow x = a + h.$

$$\Delta f(a) := f(a+h) - f(a) = d_a f(h) + \|h\| \cdot r(h)$$

$$\Delta f(a) = \underbrace{d_a}_{\text{MATRIZ}} f(h) + \|h\| \cdot r(h)$$

$\|h\| = |h_1| + |h_2| + \dots + |h_m|; \ h_i > 0$

MATRIZ

$L \cdot (h) \quad f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \to [L]_{1\times m} = [f_{11} \ f_{12} \dots f_{1m}](a)$

$$\Delta f(a) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \ \frac{\partial f}{\partial x_2} \ \frac{\partial f}{\partial x_3} \ \dots \ \frac{\partial f}{\partial x_m} \right] \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix} +$$

$$+ (h_1 + h_2 + \dots + h_m) \cdot r(h)$$

$$\Delta f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot h_m + h_1 \cdot \underbrace{r(h)}_{\varepsilon_1} + \dots + h_m \underbrace{r(h)}_{\varepsilon_m}$$

$$\Delta f(a) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) h_m}_{\text{DIFERENCIAL TOTAL DA } f.} + \varepsilon_1 \cdot h_1 + \dots + \varepsilon_m \cdot h_m ,$$

com $\varepsilon_i \xrightarrow[h\to 0]{} 0$.

Escreva $h_j = \Delta x_j$. Definimos:

$df(a)$ o diferencial total de f:

$$df(a) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \Delta x_m$$

variáveis independ

$\Delta x_i = dx_i$

$$\Rightarrow df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m$$

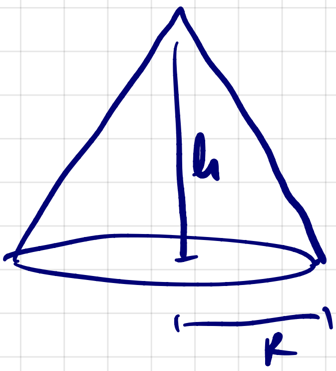
$$df \cong \Delta f$$

EXERCÍCIO:

L.9

07) FORAM FEITAS MEDIDAS DO RAIO DA BASE E DA ALTURA DE UM CONE CIRCULAR RETO E OBTIVEMOS 10 cm E 25 cm, RESPECTIVAMENTE, COM POSSÍVEL ERRO NESSAS MEDIDAS DE, NO MÁXIMO, 0,1 cm. UTILIZE DIFERENCIAL PARA ESTIMAR O ERRO MÁXIMO COMETIDO NO CÁLCULO DO VOLUME DO CONE ($20\pi cm^3$)

SOLUÇÃO:



$R = 10$ cm

$h = 25$ cm

erro máx: $0,1$ cm

$\Delta R = \Delta h = 0,1$ cm

$$V = \frac{Ab \cdot h}{3} = \frac{\pi R^2 \cdot h}{3} = V = V(R, h)$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial R} \cdot \Delta R + \frac{\partial V}{\partial h} \cdot \Delta h \quad ; \quad \text{onde:}$$

$$\frac{\partial V}{\partial R} = \frac{2\pi R h}{3} \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi R^2}{3}$$

$$\Rightarrow dV = \left(\frac{2\pi R h}{3} \cdot \Delta R + \frac{\pi R^2}{3} \cdot \Delta h \right) \Bigg|_{\substack{R = 10 \\ h = 25 \\ \Delta R = \Delta h = 0{,}1}} =$$

$$= \frac{2\pi \cdot 1\cancel{0} \cdot 25}{3} \cdot \frac{1}{1\cancel{0}} + \frac{\pi (10)^{\cancel{2}}}{3} \cdot \frac{1}{1\cancel{0}}$$

$$= \frac{50\pi}{3} + \frac{10\pi}{3} = \frac{60\pi}{3} = \underline{\underline{20\pi \text{ cm}^3}}$$

<u>Regra da Cadeia</u>: A fórmula em $\mathbb{R}^n$, é a mesma do CI:

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \quad ; \quad g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$$

f dif. em a ; g dif. em $b = f(a)$

Então: $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.