Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Cálculo III
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 06 de Exercícios - Limite e continuidade

1. Use a definição de limite para provar que:
(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} (2x-4y) = -6$ (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} (x^2+y^2) = 2.$

2. Em cada exercício a seguir, mostre que não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.
(a) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ (b) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ (c) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$

3. Mostre que o limite
$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^4+yx^3+z^2x^2}{x^4+y^4+z^4}$$
não existe.

4. Prove que o limite
$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+xz+yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$
existe.

5. Em cada exercício a seguir, mostre que existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.
(a) $f(x,y) = \dfrac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}$ (b) $f(x,y) = \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (c) $f(x,y) = \dfrac{x^2+2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

6. Mostre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0,)} \dfrac{\operatorname{sen} xy}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y} = 1$. Repare que a função só é definida para $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

7. Sabendo que
$$1 - \frac{x^2y^2}{3} < \frac{\arctan xy}{xy} < 1,$$
o que pode-se dizer sobre
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arctan xy}{xy} \text{ ? Justifique.}$$

8. Sabendo que $2|xy| - \dfrac{x^2y^2}{6} < 4 - 4\cos\sqrt{|xy|} < 2|xy|$, calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4-4\cos\sqrt{|xy|}}{|xy|}$.

9. Calcule, se existir, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\cos\dfrac{1}{y}$, lembrando que $|\cos\alpha| < 1$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$.

10. Calcule o limite de cada função vetorial a seguir:

(a) $\lim\limits_{t\to1} \left(\dfrac{\sqrt{t}-1}{1-t^2}\vec{i} + \ln(t)\vec{j} + \dfrac{1-\cos t}{2t}\vec{k} \right)$ (b) $\lim\limits_{t\to0} \left(\dfrac{2^t-1}{t}, \dfrac{\sin 3t}{2t}, \dfrac{t^2-t}{\sqrt{t+1}-1} \right)$

11. Seja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ função vetorial dada por $g(t) = (t^2, t^3)$. Calcule $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{g(t+h)-g(t)}{h}$.

12. Calcular o limite e analisar a continuidade da função vetorial $\vec{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\vec{f}(t) = \begin{cases} \dfrac{|t-3|}{t-3}\vec{i} + t^2\vec{j}, & \text{se} \quad t \neq 3 \\ \vec{0}, & \text{se} \quad t = 3 \end{cases}$$

13. Nos exercícios a seguir verifique se f é contínua na origem.

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2y^2-3xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

14. Determine os pontos onde $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x+y)}{x+y}, & \text{se} \quad x+y \neq 0 \\ 1, & \text{se} \quad x+y = 0 \end{cases}$ é contínua.

15. Seja A o conjunto dado por

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 1 \leq y \leq \ln x, 1 \leq x \leq 2\}$$

   (a) Desenhe o conjunto A. Este conjunto é um compacto do $\mathbb{R}^2$? Justifique.

   (b) Mostre que a função $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$ assume um valor máximo e um valor mínimo em A.