Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Cálculo IV - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 05 de Exercícios - Integrais de Linha. Teorema de Green

1. Calcule a integral de linha de cada campo vetorial $\vec{F}$ dado, ao logo da curva orientada indicada em cada item:
   (a) $\vec{F}(x,y) = (x^2, xy)$, ao longo do segmento de reta de $(0,0)$ a $(2,2)$.
   (b) $\vec{F}(x,y) = (4,y)$, no quarto de círculo $x^2+y^2=1$ com $x,y \leq 0$, e orientação anti-horária.
   (c) $\vec{F}(\frac{1}{y^3+1}, \frac{1}{z+1}, 1)$, $\gamma(t) = (t^3, 2t, t^2)$, com $0 \leq t \leq 1$.
2. Calcule $\int_\gamma \vec{F}d\vec{r}$, sendo $\vec{F}(x,y) = 9x^2y\vec{i} + (5x^2-y)\vec{j}$, onde γ é a curva $y = x^3+1$, de $(1,2)$ a $(3,28)$.
3. Mostre que a integral $\int_\gamma (\ln x + 2y)dx + (e^y + 2x)dy$ é independente do caminho. Depois, calcule esta integral sendo γ uma curva do ponto $A(3,1)$ ao ponto $B(1,3)$.
4. Mostre que a integral $\int_\gamma (\operatorname{sen} y \operatorname{senh} x + \cos y \cosh x)dx + (\cos y \cosh x - \operatorname{sen} y \operatorname{senh}\, x)dy$ é independente do caminho. Em seguida, calcule esta integral do ponto $A(1,0)$ ao ponto $B(2,\pi)$.
5. Calcule $\int_C \vec{F}d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y,z) = (e^x + e^{z^2})\vec{i} + (e^y + z)\vec{j} + (2xze^{z^2} + y)\vec{k}$, ao longo de qualquer caminho do ponto $A(1,1,0)$ ao ponto $B(1,2,-1)$. Por quê por qualquer caminho serve?
6. Determine as seguintes integrais ao longo dos caminhos fechados:
   (a) $\displaystyle\oint_\gamma (2xy+4)dx + (x^2+z^2)dy + 2zydz$, onde $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
   (b) $\displaystyle\oint_\gamma (xy+z)dx + (x-y)dy + 4zdz$, onde $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
7. Calcule a integral de linha em cada item a seguir de duas formas: (i) diretamente, através de parametrizações; (ii) usando o teorema de Green.
   (a) $\oint_\gamma xy^2dx + x^3dy$, onde γ é o retângulo com vértices em $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,3)$ e $(0,3)$.
   (b) $\oint_\gamma ydx - xdy$, onde γ é o circunferência unitária com centro na origem.
8. Use o teorema de Green para calcular cada integral de linha a seguir, ao longo da curva dada com orientação positiva.
   (a) $\int_\gamma e^y dx + 2xe^y dy$, onde γ é o quadrado de lados $x=0$, $x=1$, $y=0$ e $y=1$.
   (b) $\int_\gamma (ye^{\sqrt{x}})dx + (2x + \cos y^2)dy$, onde γ é a fronteira da região delimitada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$
   (c) $\int_\gamma xe^{-2x}dx + (x^4 + 2x^2y^2)dy$, onde γ é a região entre as circunferências $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=4$.
   (d) $\int_\gamma \dfrac{x^2y}{x^2+1}dx - \arctan xdy$, onde γ é a elipse $4x^2 + 25y^2 = 100$.
   (e) $\int_\gamma (6y+x)dx + (y+2x)dy$, onde γ é a circunferência $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$.
9. Utilize o Teorema de Green para calcular $\oint_\gamma \cos(x-3y)dx + \ln(x+y)dy$, onde γ é o quadrilátero $ABCD$ de vértices $A(\frac{7}{4}, \frac{1}{4})$, $B(\frac{9}{4}, -\frac{1}{4})$, $C(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ e $D(1,0)$.