Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Cálculo III
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 05 de Exercícios - Funções de várias variáveis reais

1. Em cada item a seguir, determine o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de $f : \Omega \to \mathbb{R}$ e faça um esboço do domínio:

   (a) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2-1}$ (b) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

   (c) $f(x,y) = \sqrt{x^2-4y^2+16}$ (d) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

   (e) $f(x,y) = \ln(x^2+y)$ (f) $f(x,y) = \operatorname{arcsen}(x+y)$

   (g) $f(x,y) = \operatorname{arcsen}\dfrac{x}{x+y}$ (h) $f(x,y) = \arctan\dfrac{x+y}{x-y}$

2. Obtenha o domínio de cada função a seguir e faça um esboço gráfico de f.

   (a) $f(x,y) = \sqrt{16-x^2-y^2}$ (b) $f(x,y) = x^2-y^2$

   (c) $f(x,y) = 4x^2+9y^2$ (d) $f(x,y) = \sqrt{x+y}$

3. Esboce a curva de cada função abaixo.

   (a) $f(t) = (t, t^2, t^3), \quad 0 \leq t \leq 1.$ (b) $f(t) = (4-4t)\vec{i} + (4-4t)\vec{j}$, $t \in [0,2]$.

   (c) $f(t) = (\ln t, t, 1)$, $t > 0$ (d) $f(t) = (6\operatorname{sen} t, 4, 25\cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

   (e) $f(t) = (8-4\operatorname{sen} t, 2\cos t, 4\operatorname{sen} t)$ (f) $f(t) = (\operatorname{sen} t, t, \cos t)$

4. Obtenha o domínio Ω de cada função vetorial $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ a seguir:

   (a) $\vec{f}(t) = \sqrt{2t-6}\,\vec{i} + \sqrt{\dfrac{1-t}{2-t}}\vec{j} + \ln(t-2)\vec{k}$.

   (b) $\vec{f}(t) = \left(\dfrac{1}{t}, \dfrac{t+2}{\sqrt{t^2-t}}, e^{1-t}\right)$.

   (c) $\vec{f}(t) = (\sec t,\ t,\ \ln t)$.

   (d) $\vec{f}(t) = \ln(t+1)\vec{i} + \arctan t\vec{j}$

5. Esboce a superfície definida explicitamente pela função $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{x^2+y^2}$.

6. Idem para a função $f(x,y) = \cos x$.

7. Desenhe as superfícies definidas parametricamente pelas seguintes funções:

   (a) $f\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, onde $u, v \in \mathbb{R}$

   (b) $f\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u \operatorname{sen} v \\ \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ \cos v \end{pmatrix}$, onde $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$.

8. Seja a função vetorial $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}.$$
Quais são as funções coordenadas de f? Considere o espaço domínio sendo o plano xy e o espaço imagem como sendo o plano uv. Assim:
   (a) Determine a imagem do segmento da reta $y = x$ entre $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (b) Determine a imagem da região definida por $0 < x$, $0 < y$ e $x^2 + y^2 < 1$.
   (c) Determine o ângulo entre as imagens das retas $y = 0$ e $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$. (Resp.: $\frac{\pi}{3}$) .

9. Suponhamos que a temperatura num ponto (x, y, z) do espaço é dada por $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Uma partícula se move de modo que no tempo t a sua posição é dada por $(x, y, z) = (t, t^2, t^3)$. Determine a temperatura no ponto ocupado pela partícula em $t = \frac{1}{2}$.

10. O potencial elétrico no ponto (x, y) do plano xy é $V(x, y)$ volts, onde
$$V(x, y) = \frac{4}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}.$$
Trace as curvas equipotenciais de V em $16, 12, 8, 4, 1, \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$.

11. Suponhamos que a densidade por unidade de área de uma película fina, referida às coordenadas retangulares, planas, seja dada pela fórmula
$$d(x, y) = x^2 + 2y^2 - x + 1,$$
para $-1 \leq x \leq 1$ e $-1 \leq y \leq 1$. Esboce o conjunto de pontos nos quais a película tem densidade $\frac{7}{4}$.

12. Faça o esboço das superfícies de nível da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z$ em $8, 4, 0, -4$ e -8.

13. Seja $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ definida por
$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 \\ x + y + z \end{pmatrix}.$$
Determine o conjunto de nível γ definido implicitamente pela equação
$$f(x, y, z) = (2, 1).$$