Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Cálculo IV - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 04 de Exercícios - Mudança de variáveis em integrais triplas. Campos vetoriais.

1. Sendo $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ e que $u = u(t, w)$ e $v = v(t, w)$, mostre que
$$J\left(\frac{x, y}{t, w}\right) = J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) \cdot J\left(\frac{u, v}{t, w}\right).$$

2. Seja Ω a região do espaço xyz definida pelas desigualdades $1 \leq x \leq 2$, $0 \leq xy \leq 2$ e $0 \leq z \leq 1$. Calcule
$$\iiint_\Omega (x^2y + 3xyz)dxdydz,$$
aplicando a transformação $u = x$, $v = y$ e $w = 3z$, e integrando sobre uma região apropriada Ω' do espaço uvw.

3. Calcule $\displaystyle\int_0^1 \int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y}{2}+1} \left(\frac{2x-y}{2} + \frac{z}{3}\right) dxdydz$, aplicando a transformação $u = \frac{2x-y}{2}$, $v = \frac{y}{2}$, $w = \frac{z}{3}$ e integrando sobre uma região adequada no espaço uvw.

4. Calcule $\displaystyle\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-(x^2+y^2)}^{x^2+y^2} 21xy^2 dzdydx$, usando coordenadas cilíndricas.

5. Use coordenadas cilíndricas para calcular o volume do sólido Ω dado por $x^2 + y^2 - 2x \leq 0$, $0 \leq z \leq x + y$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$. (Resp..: $\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}$)

6. Passe para coordenadas esféricas e calcule
$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} e^{-(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dzdydx.$$

7. Se S for o sólido no primeiro octante, limitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e pelos planos coordenados, calcule a integral $\iiint_S xyzdV$ por três métodos:
   (a) usando coordenadas esféricas;
   (b) usando coordenadas retangulares;
   (c) usando coordenadas cilíndricas.

8. Mostre que os seguintes campos vetoriais são conservativos (ou seja, campos gradientes). Em seguida, calcule a função potencial de $\vec{F}$.
   (a) $\vec{F}(x, y, z) = (4x + 5yz)\vec{i} + (5xz)\vec{j} + 5xy\vec{k}$
   (b) $\vec{F}(x, y, z) = (yz + 2, xz + 1, xy + 2z)$
   (c) $\vec{F}(x, y, z) = (ze^x + e^y)\vec{i} + (xe^y - e^z)\vec{j} + (-ye^z + e^x)\vec{k}$

9. Sejam $\vec{F}(x, y, z) = (f_1, f_2, f_3)$ e $\vec{G}(x, y, z) = (g_1, g_2, g_3)$ funções vetoriais em um domínio Ω com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em Ω. Mostre que:
   (a) $\text{rot}(\vec{F} + \vec{G}) = \text{rot}(\vec{F}) + \text{rot}(\vec{G})$.

(b) $\text{rot}(h\vec{F}) = h\,\text{rot}(\vec{F}) + \nabla h \times \vec{F}$, onde $h = h(x, y, z)$ é uma função escalar diferenciável em Ω.

10. Calcule div$\vec{F}$ para o campo vetorial:

    (a) $\vec{F}(x, y) = \text{sen}^2 x\vec{i} + 2\cos x\vec{j}$

    (b) $\vec{F}(x, y, z) = \ln xy\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{K}$.

11. Encontre a divergência e o rotacional do campo vetorial dado:

    (a) $\vec{F}(x, y, z) = (e^x \cos y, e^x \,\text{sen}\, y, z)$

    (b) $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$

12. Sendo $\vec{u} = 2xz\vec{i} + (x^2 - z^2)\vec{j} + (x^2 + 2z)\vec{k}$, calcule rot(rot $\vec{u}$).

13. Se f for um campo escalar e $\overrightarrow{F}$ e $\overrightarrow{G}$ forem campos vetoriais, então $f\overrightarrow{F}$, $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{G}$ e $\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{G}$ são definidos por

$$(f\overrightarrow{F})(x, y, z) = f(x, y, z)\overrightarrow{F}(x, y, z)$$
$$(\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{G})(x, y, z) = \overrightarrow{F}(x, y, z) \cdot \overrightarrow{G}(x, y, z)$$
$$(\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{G})(x, y, z) = \overrightarrow{F}(x, y, z) \times \overrightarrow{G}(x, y, z)$$

Prove cada identidade a seguir, admitindo que as derivadas parciais apropriadas existam e sejam contínuas.

   (a) $\text{div}\,(\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}) = \text{div}\,\overrightarrow{F} + \text{div}\,\overrightarrow{G}$

   (b) $\text{rot}\,(\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}) = \text{rot}\;\overrightarrow{F} + \text{rot}\,\overrightarrow{G}$

   (c) $\text{div}\, f\overrightarrow{F} = f\text{div}\,\overrightarrow{F} + \overrightarrow{F} \cdot \nabla f$

   (d) $\text{rot}\,(f\overrightarrow{F}) = f\text{rot}\,\overrightarrow{F} + (\nabla f) \times \overrightarrow{F}$

   (e) $\text{div}\,(\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{G}) = \overrightarrow{G} \cdot \text{rot}\,\overrightarrow{F} - \overrightarrow{F} \cdot \text{rot}\,\overrightarrow{G}$