Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Cálculo III
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 04 de Exercícios - Noções de Topologia

1. Seja X o conjunto das funções continuas em $[0,1]$ e seja $\varphi : [0,1] \to (0,+\infty)$ contínua. Defina
$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| \cdot \varphi(x)\, dx.$$
Mostre que (X,d) é um espaço métrico.

2. Seja $M = \mathbb{R}^2$. Mostre que (M,d_1) e (M,d_∞) são espaços métricos, onde, para $x = (x_1,x_2)$ e $y = (y_1,y_2)$,
$$d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \ \text{ e } \ d_\infty(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|,\, |x_2 - y_2|\}.$$
Em seguida, defina e desenhe as bolas abertas de centro em $(0,0)$ e raio unitário em (M,d_1) e (M,d_∞).
Obs. Nunca mais ria do Quico do episódio do Chaves quando ele queria uma "bola quadrada" - ele só estava lidando com outra métrica diferente da euclidiana...

3. Seja $\mathbb{R}^+$ o conjunto dos números reais positivos. Mostre que
$$d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$$
é uma métrica em $\mathbb{R}^+$.

4. Sejam (X_1,d_1) e (X_2,d_2) espaços métricos. Mostre que a aplicação $d : X_1 \times X_2 \to [0,+\infty)$ definida por
$$d(x,y) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2)$$
define uma métrica em $X_1 \times X_2$, onde $x = (x_1,x_2)$ e $y = (y_1,y_2)$.

5. Definimos o espaço de todas as sequências *limitadas pela norma do supremo*, e denotada por ℓ_∞, o conjunto
$$\ell_\infty = \{(x_n)_n \, : \, x_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \ \text{ e } \ \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\}.$$
   (a) Dê exemplos de sequências em ℓ_∞, mostrando assim, que ℓ_∞ está bem definido.
   (b) Defina a aplicação $d : \ell_\infty \times \ell_\infty \to [0,+\infty)$ por
   $$d((x_n),(y_n)) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$
   Mostre que (ℓ_∞, d) é um espaço métrico.

6. Mostre que uma sequência (x_n) converge para a em (X,d) se, e somente se, a sequência $(d(a,x_n))$ converge para 0 em $\mathbb{R}$ com a métrica usual.

7. Mostre que $(x_n,y_n) \to (x,y)$ em $\mathbb{R}^2$, com a métrica usual se, e somente se, $x_n \to x$ e $y_n \to y$ em $\mathbb{R}$ com a métrica usual.

8. Para quaisquer $X, Y \subset \mathbb{R}$, prove que

   (a) $\operatorname{int}(X \cap Y) = \operatorname{int}(X) \cap \operatorname{int}(Y)$.

   (b) $\operatorname{int}(X) \cup \operatorname{int}(Y) \subset \operatorname{int}(X \cup Y)$.

9. Mostrar com um exemplo que, dados $X, Y \subset \mathbb{R}$, $\operatorname{int}(X \cup Y) \neq \operatorname{int}(X) \cup \operatorname{int}(Y)$.

10. Se $A = [0, 1) \cup (1, 2] \cup \{3\}$, determine $\operatorname{int}(A)$.

11. Qual é o interior do conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \,:\, x < y\}$ em relação a $\mathbb{R}^2$? Justifique.

12. Mostre que o subconjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x < y\}$ é um aberto de $\mathbb{R}^2$.

13. Mostre que o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 < 1,\ x > 0,\ y > 0\}$ é um aberto do $\mathbb{R}^2$.

14. Mostre que o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é um fechado de $\mathbb{R}$.

15. Mostre que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais não é fechado e nem aberto de $\mathbb{R}$. Qual é o fecho de $\mathbb{Q}$?

16. Faça o desenho de cada região do $\mathbb{R}^2$ abaixo, identificando e justificando se a mesma é um aberto, ou fechado ou nem aberto e nem fechado do $\mathbb{R}^2$. Identifique o seu fecho e a sua fronteira. Decida também se algum deles é compacto do $\mathbb{R}^2$.

   (a) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 4 < x^2 + y^2 \leq 9\}$

   (b) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ d_1((x, y), (1, 0)) < 1\}$

   (c) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 - xy < 1\}$

   (d) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, d_\infty((x, y), (0, 1)) \leq 1\}$