15/08/23

Na aula passada, vimos várias propriedades do produto vetorial e o estudo do produto misto. Lembrando, o produto misto entre os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é dado por:

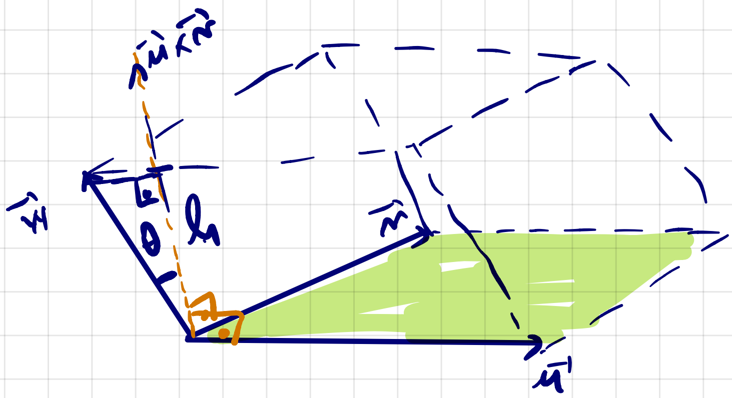
$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Um resultado importante sobre o produto misto é:

PROPOSIÇÃO: O volume do paralelepípedo com vértices nos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é numericamente igual ao módulo do produto misto entre $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

DEMONSTR: Sejam $\vec{u},\vec{v},\vec{w} \in \mathbb{R}^3$. Então:



$V = A_b \cdot h$; onde: $A_b = \|\vec{u}\times\vec{v}\|$

$$\cos\theta = \frac{h}{\|\vec{w}\|} \Rightarrow h = \|\vec{w}\|\cdot\cos\theta.$$

$$\boxed{\vec{U}\cdot\vec{V} = \|\vec{U}\|\cdot\|\vec{V}\|\cdot\cos\theta}$$

Assim, temos:

$$V = A_b\cdot h = \|\vec{u}\times\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|\cdot\cos\theta$$

$$= \left|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}\right| = \left|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\right|$$

$\square$

Ex: Determine o volume do paralelepípedo formado pelos vetores $\vec{u}=(1,0,-1)$, $\vec{v}=(2,2,3)$ e $\vec{w}=(0,-1,1)$.

Solução:

$$V = \left|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\right| \quad ; \text{ onde:}$$

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right|\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{array} =$$

$$= 2 + 0 + 2 - 0 + 3 - 0 = 7$$

$$\Rightarrow V = \left|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\right| = |7| = 7 \text{ unidades de volume.}$$

Corolário: Três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ no $\mathbb{R}^3$ são coplanares se, e somente se, $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=0$.

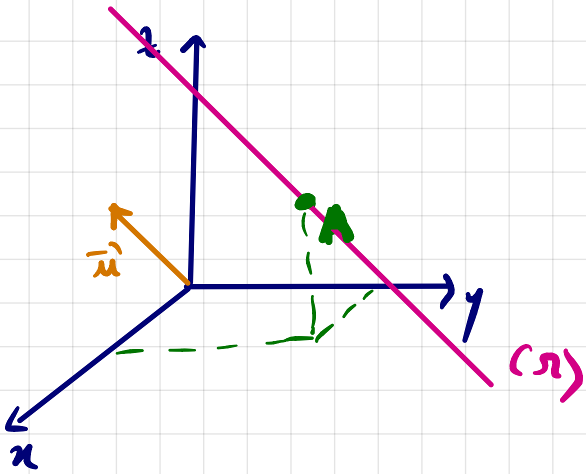
Demonstração: De fato, se forem coplanares, então, o "paralelepípedo" por eles formado terá volume nulo, ou seja $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=0$.

Por outro lado, se $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=0$, então o paralelepípedo por eles formado terá volume nulo, i.e., os três vetores serão coplanares. $\square$

RETAS NO $\mathbb{R}^3$.

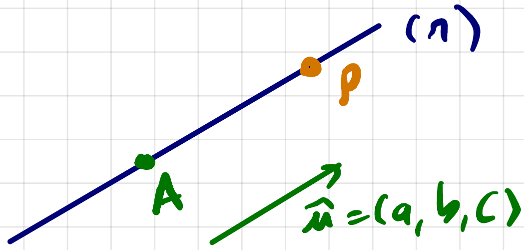
Vamos determinar equações de retas no espaço $\mathbb{R}^3$.

Para determinar uma reta, precisamos saber algumas informações mínimas. Por exemplo, uma reta passa por 2 pontos, ou, ainda, a reta passa por um ponto e há um vetor que fornece sua direção, chamado de vetor diretor da reta.



Como encontrar a eq. dessa reta?

Dados $A(x_A, y_A, z_A)$ um ponto sobre (r) e $\vec{u} = (a, b, c)$ um vetor diretor da reta (r). Dado $P(x, y, z)$ um ponto qualquer sobre (r), temos:



$\vec{AP} = t \cdot \vec{u}$, $t \in \mathbb{R}$

$P - A = t \cdot \vec{u}$

Ou seja, obtemos:

$$P - A = t \cdot \vec{u}$$

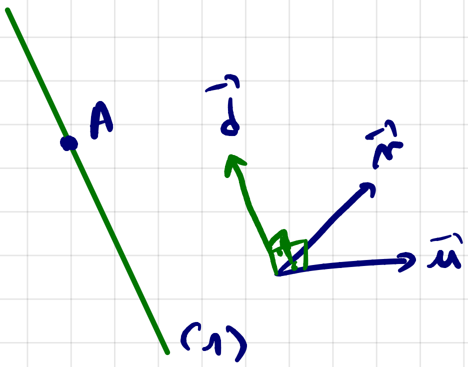
$$(x, y, z) - (x_A, y_A, z_A) = t \cdot (a, b, c)$$

$$\boxed{(x - x_A,\ y - y_A,\ z - z_A) = t \cdot (a, b, c)}$$

(equação vetorial da reta (r), passando por A e possuindo $\vec{u}$ como vetor diretor)

Ex.: Obtenha a eq. da reta (r) que passa por $A(1, -2, 3)$ e é perpendicular aos vetores $\vec{u} = (-1, 0, 1)$ e $\vec{v} = (2, -1, 2)$.

Solução:



$$\vec{d} = \vec{u} \times \vec{v}$$

$$\vec{d} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{matrix}$$

$$= 0\vec{i} + 2\vec{j} + 1 \cdot \vec{k} - 0\vec{k} + \vec{i} + 2\vec{j}$$

$$= \vec{i} + 4\vec{j} + 1\vec{k} = (1, 4, 1) \Rightarrow \vec{d} = (1, 4, 1)$$

Assim, a eq. da reta será:

$$(x - x_A,\ y - y_A,\ z - z_A) = t \cdot (1, 4, 1) \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

$$(x - 1,\ y + 2,\ z - 3) = t \cdot (1, 4, 1)$$

(eq. vetorial da reta (r))

EQ. PARAMÉTRICA DA RETA:

Dada a eq. vetorial da reta (r) que passa por $A(x_A, y_A, z_A)$ e possui $\vec{u} = (a, b, c)$ como vetor diretor:

$$(x - x_A,\ y - y_A,\ z - z_A) = t\cdot(a, b, c) \quad ; \ t \in \mathbb{R};$$

então:

$$\begin{aligned} x - x_A &= t\cdot a \\ y - y_A &= t\cdot b \\ z - z_A &= t\cdot c \end{aligned}$$

, ou seja:

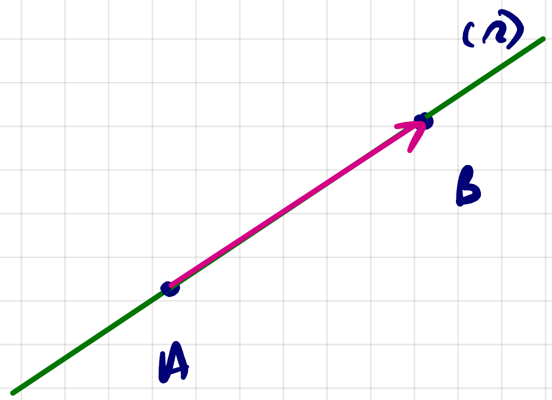
$$\boxed{(r)\begin{cases} x = x_A + a\cdot t \\ y = y_A + b\cdot t \\ z = z_A + c\cdot t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}}$$

(eq. paramétrica da reta (r))

Ex: Obtenha a eq. paramétrica da reta (r) que passa pelos pontos $A(2,-1,0)$ e $B(3,1,1)$.

Solução:

$$(r):\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + b\cdot t \\ z = z_A + c\cdot t \end{cases}$$



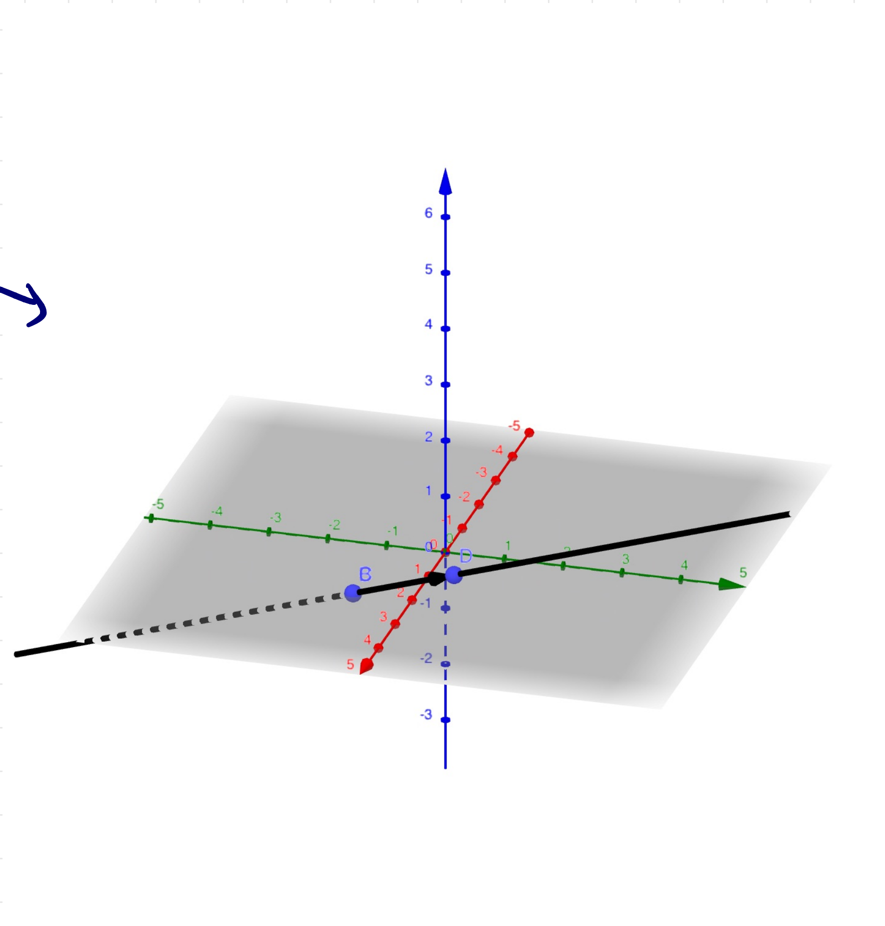
O vetor diretor será:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{AB} = B - A \\ \vec{u} &= (3,1,1) - (2,-1,0) \\ \vec{u} &= (\underset{a}{1}, \underset{b}{2}, \underset{c}{1}) \end{aligned}$$

Logo, uma eq. paramétrica para (r) será:

$$(r): \begin{cases} x = 2 + 1t \\ y = -1 + 2t \\ z = 0 + 1t \end{cases} \Rightarrow (r): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{cases}$$

PELO GEOGEBRA.



EQUAÇÃO SIMÉTRICA DA RETA: Dada a eq.

$$(x - x_A, y - y_A, z - z_A) = t \cdot (a, b, c),$$

então:

$$\begin{cases} x - x_A = at \rightsquigarrow t = \dfrac{x - x_A}{a} \\ y - y_A = bt \rightsquigarrow t = \dfrac{y - y_A}{b} \\ z - z_A = c \cdot t \rightsquigarrow t = \dfrac{z - z_A}{c} \end{cases};$$

$a, b, c \neq 0$

Então, a eq. SIMÉTRICA da reta (r) será:

$$\boxed{\frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b} = \frac{z - z_A}{c}} \quad ; \quad (a, b, c \neq 0)$$

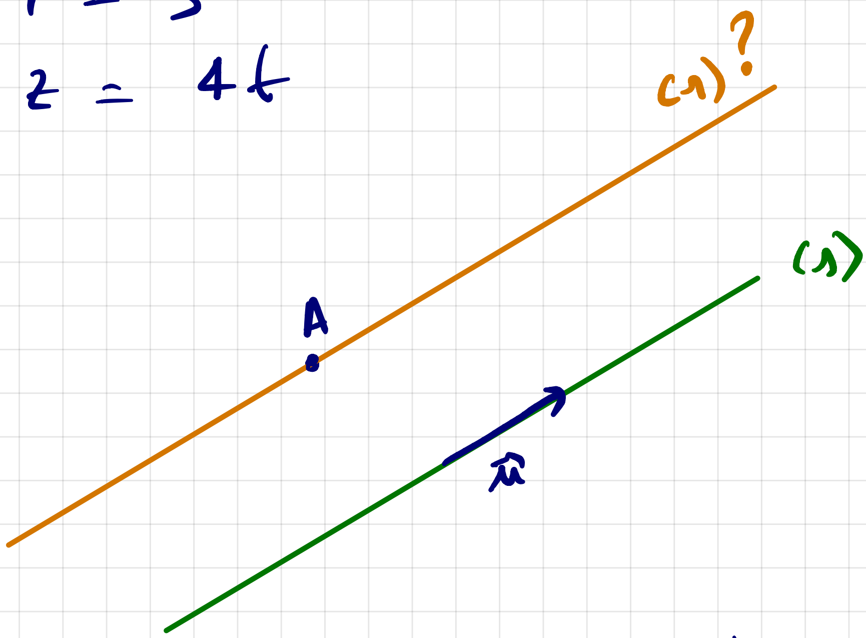
Se $a = 0$ (ou $b = 0$ ou $c = 0$) ; então, a eq. fica:

$$\boxed{\frac{y - y_A}{b} = \frac{z - z_A}{c} \quad ; \quad x = x_A .}$$ et cetera.

Ex.: Encontre a eq. SIMÉTRICA da reta (r) que passa por $A(2, 2, -1)$ e é paralela à reta (s) de equação

$$(s) \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 \\ z = 4t \end{cases}$$

SOLUÇÃO:



Como $(r) \parallel (s)$, então o vetor diretor de (r) será o vetor diretor de (s), i.e., $\vec{u} = (-2, 0, 4)$

$\Rightarrow b = 0$

[Pois: $(r): \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + 0t \\ z = 0 + 4t \end{cases}$]

$\vec{u}$.

Assim, a eq. da reta (r), na forma simétrica, será:

$$(r): \quad \frac{x - x_A}{a} = \frac{z - z_A}{c} \; ; \quad y = y_A$$

(pois $b = 0$)

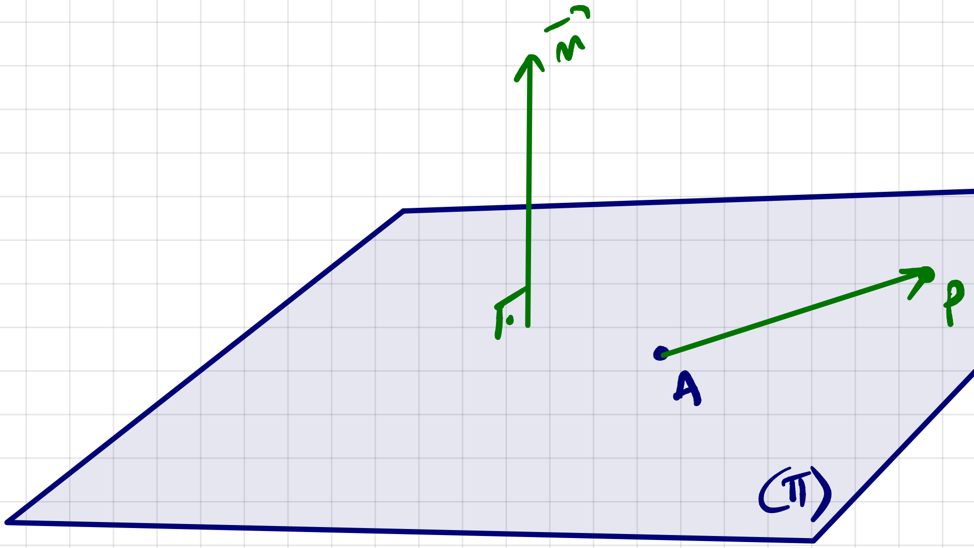
$$(r): \quad \frac{x-2}{-2} = \frac{z-(-1)}{4} \; ; \quad y = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{(r): \quad \frac{2-x}{2} = \frac{z+1}{4} \; ; \quad y = 2}$$

EQUAÇÃO DO PLANO:

Por 3 pontos distintos no espaço passa um único plano. Outra forma de determinar um plano no $\mathbb{R}^3$ é tomar apenas um ponto e um vetor $\vec{n} = (a, b, c)$ normal ao plano desejado.

Sejam $A(x_A, y_A, z_A) \in (\pi)$ e $\vec{n} = (a, b, c)$ normal ao plano (π).



Seja $P(x,y,z)$ um ponto qualquer sobre o plano (π).

Como $\vec{n}$ é normal à (π), então $\vec{AP}$ será ortogonal ao vetor $\vec{n}$. Logo:

$$\vec{AP}\cdot\vec{n}=0 \qquad \text{(eq. do plano (π))}$$

$$(P-A)\cdot\vec{n}=0$$

$$\big((x,y,z)-(x_A,y_A,z_A)\big)\cdot(a,b,c)=0$$

$$(x-x_A,\ y-y_A,\ z-z_A)\cdot(a,b,c)=0$$

$$a\cdot(x-x_A)+b\cdot(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$

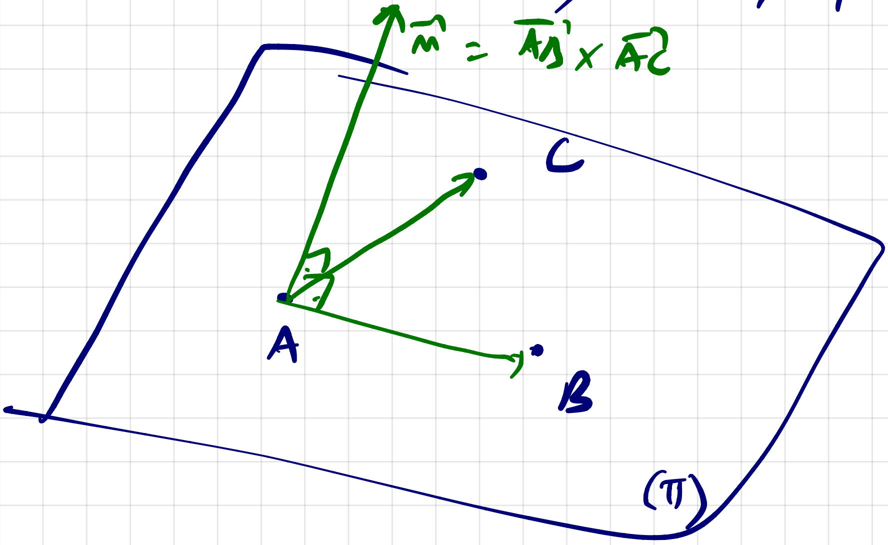
$$ax-a\cdot x_A+by-b\cdot y_A+cz-c\cdot z_A=0$$

$$ax+by+cz+\underbrace{(-a\cdot x_A-b\cdot y_A-c\cdot z_A)}_{=d}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{ax+by+cz+d=0} \qquad \text{(eq. do plano (π))}$$

Ex.: Encontrar a eq. do plano (π) que passa pelos pontos $A(2,-1,0)$; $B(3,1,1)$ e $C(2,2,0)$.

Solução:



$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$; onde

$\vec{AB} = B - A = (3,1,1) - (2,-1,0) = (1,2,1)$

$\vec{AC} = C - A = (2,2,0) - (2,-1,0) = (0,3,0)$

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \left|\begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right|$$

$\vec{n} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 3\vec{k} - 0\vec{k} - 3\vec{i} - 0\vec{j}$

$\vec{n} = -3\vec{i} + 0\vec{j} + 3\vec{k} \Rightarrow \vec{n} = (\underset{a}{-3}, \underset{b}{0}, \underset{c}{3})$

$\Rightarrow (\pi): \; ax + by + cz + d = 0$

$(\pi): -3x + 0y + 3z + d = 0$

$\boxed{(\pi): \; -3x + 3z + d = 0}$ ..

Como $A(2,-1,0) \in (\pi)$; então:

$$-3\cdot(2) + 3\cdot(0) + d = 0$$

$$-6 + d = 0 \Rightarrow \boxed{d = 6}$$

Logo, a eq. do plano (π) será:

$$(\pi): \ -3x + 3z + 6 = 0 \qquad \div(-3)$$

$$\boxed{(\pi): \ x - z - 2 = 0}$$