Fundação Universidade Federal de Pelotas
Cursos de Física e Matemática
Disciplina de Geometria Analítica
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 06 de Exercícios - Retas e planos no $\mathbb{R}^3$

1. Dados os pontos $A(1,2,3)$ e $B(-2,3,0)$, determine:
   (a) a equação vetorial da reta que passa por A e B.
   (b) a equação paramétrica da reta que passa por A e B.
   (c) a equação simétrica da reta que passa por A e B.

2. Encontre a equação do plano (π) que contêm o ponto $P(3,1,2)$ e possui o vetor $\vec{n} = (1,2,-3)$ como vetor normal.

3. Encontre a equação do plano que contém os pontos $A(1,1,1)$, $B(2,-1,3)$ e $C(-1,0,4)$.

4. Encontre a equação do plano que é perpendicular à reta que passa pelos pontos $P(2,2,-4)$ e $Q(7,-1,3)$ e contendo o ponto $A(5,-1,2)$.

5. Encontre a equação do plano que contém o ponto $P(1,-1,1)$ e a reta $(r): (x,y,z) = (2,2,2) + t(1,1,-1)$.

6. Obtenha a equação da reta que passa pelo ponto $A(4,-5,20)$ e é perpendicular ao plano $4x - 2y + z - 7 = 0$.

7. Determine a equação da reta (r) que passa pelo ponto $A(2,0,-4)$ e é paralela a cada um dos planos $(\pi): 2x + y - z = 0$ e $(\alpha): x + 3y - 5z = 0$.

8. Determine a equação da reta (r) que passa por $A(-2,0,5)$ e é paralela á reta (s) de equações paramétricas: $x = 1 + 2t$, $y = 4 - t$ e $z = 6 + 2t$.

9. Obtenha a equação da reta que passe pela origem do $\mathbb{R}^3$ e que é paralela á reta $x = t$, $y = -1+t$, $z = 2$.

10. Determine o ângulo entre as retas

$$(r): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad \text{e} \quad (s): \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 2 + t \\ z = 5 + t \end{cases}$$

11. Determine a equação do plano que passa pela origem e é paralelo ao plano $4x - 2y + 7x + 12 = 0$.

12. Obtenha a equação do plano que contém o ponto $A(-1,4,2)$ que contém a reta de intersecção entre os planos $4x - y + z - 2 = 0$ e $2x + y - 2z - 3 = 0$.

13. Dê uma equação da reta que passe por $A(1,3,2)$ e é perpendicular ao plano (π) de equação $x - 5y + z = 0$.

14. Mostre que as retas de equações

$$\ell_1: \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 3 + t \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \ell_2: \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 + 6t \\ z = 2 - \dfrac{5}{2}t \end{cases}$$

se interseptam e obtenha uma equação do plano que elas determinam.

15. Dados os planos $(\alpha) : x - y + z + 1 = 0$ e $(\beta) : x + y - z - 1 = 0$, pede-se a equação do plano que contém a intersecção de (α) e (β) e é perpendicular ao plano $(\pi) : x + y + z = 0$.

16. Determine a distância do ponto $P(5, 4, -7)$ à reta (s) de equação

$$\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$$

17. Determine a distância do ponto $P(2, 3, 5)$ a cada um dos eixos coordenados.

18. (**Já caiu em prova, em 2002!**) Sejam a reta r de equação vetorial: $(r) : (x - 2, y + 3, z - 1) = t(1, 1, 2)$ e o ponto $P(0, 3, 1)$.

    (a) Achar a equação do plano (π) que contém (r) e P.

    (b) Achar a equação da esfera (ε) de centro em P, onde $(\varepsilon) \cap (\pi)$ dá um círculo máximo de 16π unidades de área.

19. (**Já caiu em prova!**) Achar a equação da reta (s) perpendicular aos vetores $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ e que passa por $P = (r) \cap (\beta)$, sendo (r) a reta de equação

$$(r) : \begin{cases} x = 4t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - 3t \end{cases} \quad \text{e} \quad (\beta) \text{ o plano de equação } (\beta) : \ x + y + 2z - 6 = 0.$$

20. (**Já caiu em prova!**) Considere os seguintes pontos do $\mathbb{R}^3$: $A(1, 2, -1)$, $B(2, 3, 1)$ e $C(4, 0, 2)$, responda cada item a seguir.

    (a) Obtenha a equação do plano (π) que contenha esses três pontos.

    (b) Obtenha a equação da reta (r) que passa pelo ponto A e é perpendicular ao plano (π) determinado pelo item anterior.

    (c) Obtenha a área do triângulo formado pelos três pontos dados.

21. (**Já caiu em prova, em 2005!**) Obtenha a equação da esfera de centro $C(3, -5, 4)$ e que passa por $T = (r) \cap (s)$, onde (r) e (s) são as retas de equações

$$(r) : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -14 + t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad \text{e} \quad (s) : \begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = 1 - 4t \\ z = 2t \end{cases}$$