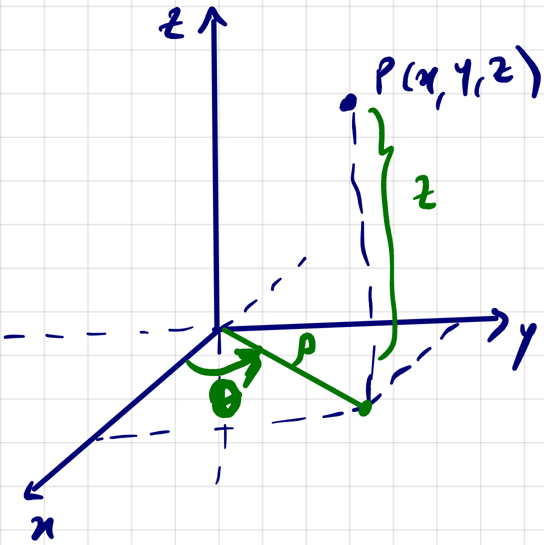
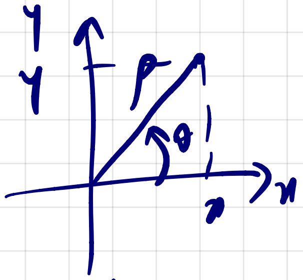
$\boxed{24/08/23}$

Vimos no final da aula passada o sist. de coordenadas cilíndricas.

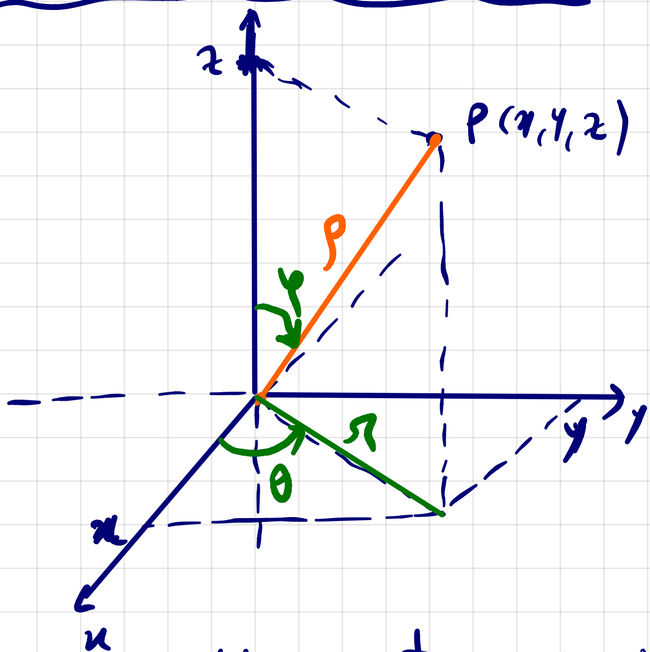


$$\Longrightarrow \quad x = \rho\cos\theta$$
$$y = \rho\,\text{sen}\,\theta$$
$$z = z$$



$$P(x,y,z) = (\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta, z)$$

SISTEMA DE COORDENADAS ESFÉRICAS:

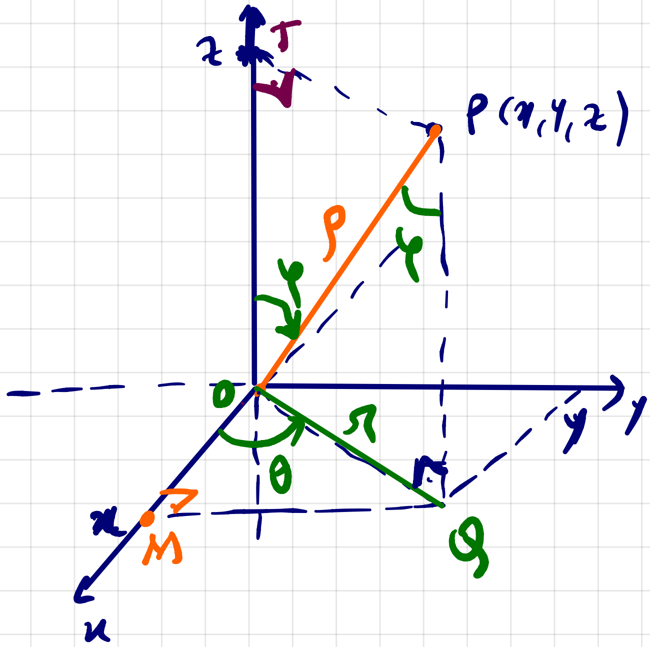


Um ponto no sist. esférico fica identificado no espaço por 3 coordenadas

$$(\rho, \theta, \varphi),$$

onde φ é marcado do semi-eixo positivo z até $\rho = d_{OP}$. Logo, $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$

Relação do sist. esférico para o cartesiano:



O triângulo OPQ é reto em Q.

Então;

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{r}{\rho}$$

$$\Rightarrow \underline{r = \rho \operatorname{sen}\varphi}$$

O triângulo OQM é reto em M. Então:

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = \underbrace{r}\cdot\cos\theta \Rightarrow x = \underbrace{\rho\operatorname{sen}\varphi}_{r}\cos\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = \underbrace{r}\cdot\operatorname{sen}\theta \Rightarrow y = \rho\operatorname{sen}\varphi\cdot\operatorname{sen}\theta$$

O triângulo OPT é reto em T. Disso:

$$\cos\varphi = \frac{z}{\rho} \Rightarrow \boxed{z = \rho\cos\varphi}$$

Logo; $P(x, y, z) = (\rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \rho\cos\varphi)$.

Além disso, pela distância entre a origem e o ponto P, temos:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

Ex: A superfície esférica de raio 2, centrada na origem possui equação:

$$x^2+y^2+z^2=4$$

no sist. esférico, $x^2+y^2+z^2=\rho^2$

$$\Rightarrow \rho^2=4 \rightarrow \boxed{\rho=2}$$

→ EQUAÇÃO DA SUPERFÍCIE ESFÉRICA NO SISTEMA DE COORDENADAS ESFÉRICAS

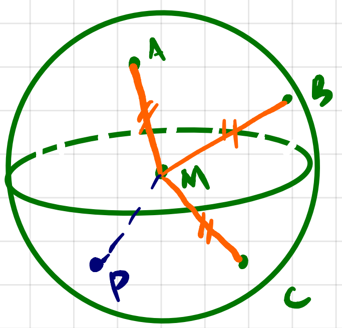
EXERCÍCIOS DAS LISTAS:

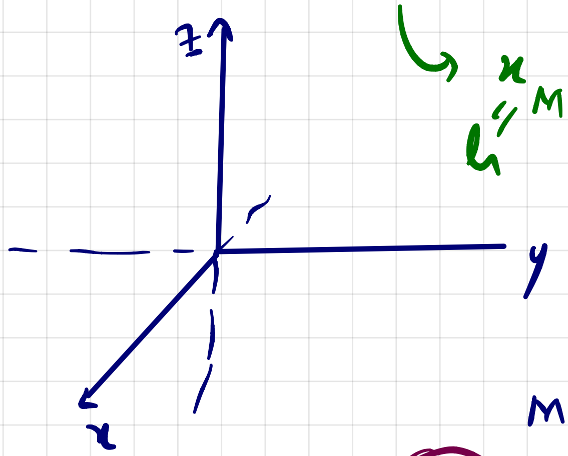
LISTA 05:

06) eq. da "esfera" que contém os pontos $A(0,0,4)$; $B(2,1,3)$ e $C(0,2,6)$ e o centro M no plano YZ.

→ $x_M = 0$

$M(0, k, \ell)$





$M(0, k, \ell)$

$$R = d_{AM} = d_{BM} = d_{CM} = d_{PM}$$

(x,y,z)

$P(x,y,z)$ um ponto qualquer

- $d_{PM} = d_{AM}$

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-k)^2+(z-\ell)^2} = \sqrt{(0-0)^2+(0-k)^2+(4-\ell)^2}$$

$$x^2 + y^2 - 2ky + \cancel{k^2} + z^2 - 2\ell z + \cancel{\ell^2} = 0 + \cancel{k^2} + 16 - 8\ell + \cancel{\ell^2}$$

$$\boxed{x^2+y^2+z^2-2ky-2\ell z = 16-8\ell} \quad (I)$$

- $d_{PM} = d_{BM}$:

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-k)^2+(z-\ell)^2} = \sqrt{(2-0)^2+(1-k)^2+(3-\ell)^2}$$

$$x^2 + y^2 - 2ky + \cancel{k^2} + z^2 - 2\ell z + \cancel{\ell^2} = 4 + 1 - 2k + \cancel{k^2} + 9 - 6\ell + \cancel{\ell^2}$$

$$\boxed{x^2+y^2+z^2-2ky-2\ell z = 14-2k-6\ell} \quad (II)$$

- $d_{PM} = d_{CM}$:

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-k)^2+(z-\ell)^2} = \sqrt{(0-0)^2+(2-k)^2+(6-\ell)^2}$$

$$x^2 + y^2 - 2ky + \cancel{k^2} + z^2 - 2\ell z + \cancel{\ell^2} = 0 + 4 - 4k + \cancel{k^2} + 36 - 12\ell + \cancel{\ell^2}$$

$$\boxed{x^2+y^2+z^2-2ky-2\ell z = 40-4k-12\ell} \quad (III)$$

De (I), (II) e (III), temos:

$$\begin{cases} 16-8\ell = 14-2k-6\ell \\ 16-8\ell = 40-4k-12\ell \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2k-2\ell = -2 & \div(2) \\ 4k+4\ell = 24 & \div(4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k-\cancel{\ell} = -1 \\ k+\cancel{\ell} = 6 \end{cases} \quad +$$

$$2k = 5 \Rightarrow k = \frac{5}{2}$$

$$\ell = 6-k$$

$$\ell = 6-\frac{5}{2}$$

$$\ell = \frac{7}{2}$$

Logo, o centro $M(0, k, l)$ da superfície esférica será:

$$M\left(0, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right).$$

$R = d_{AM}$ (por exemplo)

$$R = \sqrt{(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2 + (z_A - z_M)^2}$$

$$R = \sqrt{(0-0)^2 + \left(0 - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(4 - \frac{7}{2}\right)^2}$$

$$R = \sqrt{0 + \frac{25}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{26}{4}}$$

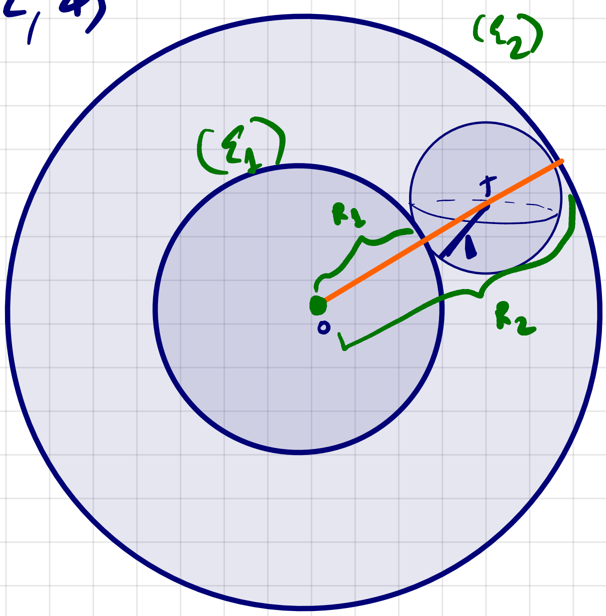
Por fim, a eq. procurada será:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = R^2$$

$$\boxed{(x-0)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{26}{4}}$$

LISTA 05; QUESTÃO 07.

Determinar as eq. de duas esferas centradas em $O(0,0,0)$ e tangentes à esfera de raio 1, centrada em $T(3,-2,4)$



$$R_1 = d_{OT} - 1$$

$$R_2 = d_{OT} + 1$$

A esfera (ε_1) tem centro em $(0,0,0)$ e raio R_1, onde

$R_1 = d_{OT} - 1$; $d_{OT} = \sqrt{(0-3)^2+(0+2)^2-(0-4)^2}$

$= \sqrt{9+4+16} = \sqrt{29}$

$\Rightarrow R_1 = \sqrt{29} - 1$

Assim a eq para (ε_1) será:

$$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2 = (\sqrt{29}-1)^2$$

$$\boxed{x^2+y^2+z^2 = (\sqrt{29}-1)^2}$$

A esfera (ε_2) tem raio $R_2 = d_{OT} + 1$

$= \sqrt{29}+1$.

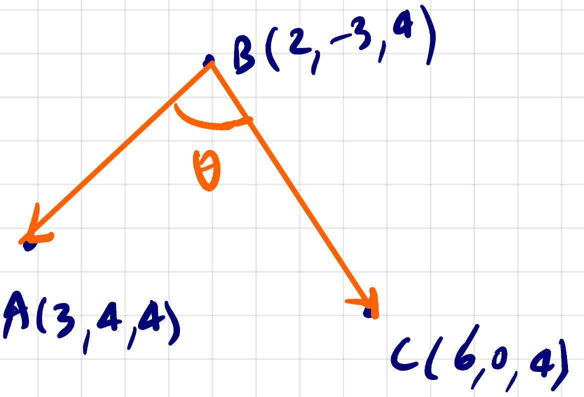
e centrada em $(0,0)$. Logo, sua eq. será:

$$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2 = (\sqrt{29}+1)^2$$

$$\boxed{x^2+y^2+z^2 = (\sqrt{29}+1)^2}$$

LISTA 05. QUESTÃO 18:

18)



$\theta = ?$

$\vec{BA} = A - B$

$\vec{BA} = (3,4,4)-(2,-3,4)$

$\vec{BA} = (1,7,0)$

$\vec{BC} = C - B$

$\vec{BC} = (6,0,4)-(2,-3,4) \Rightarrow \vec{BC} = (4,3,0)$

Então:

$$\cos\theta = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{\|\vec{BA}\| \cdot \|\vec{BC}\|} ;$$

onde $\|\vec{BA}\| = \sqrt{(1)^2+(7)^2+0^2} = \sqrt{50} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$

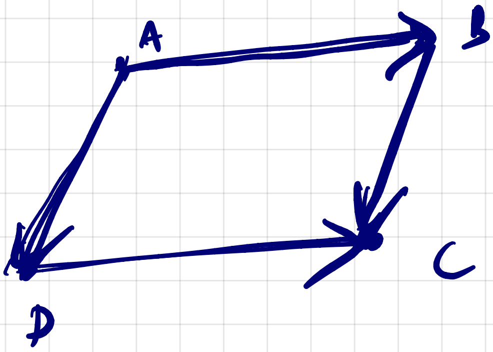
$\|\vec{BC}\| = \sqrt{(4)^2+(3)^2+0^2} = \sqrt{16+9} = 5 ;$

$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = (1,7,0)\cdot(4,3,0) = 1.4 + 7.3 + 0.0$

$= 4 + 21 = 25$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{25}{5\sqrt{2}.5} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{\theta = 45^\circ}$$

LISTA 05 ; QUESTÃO 21



$A(-2,1,-1)$; $B(1,1,3)$;

$C(-5,4,0)$; $D(-8,4,-4)$

CORRIGIR NA LISTA.

$\vec{AB} = B - A = (1,1,3) - (-2,1,-1) = (3,0,4)$

$\vec{AD} = D - A = (-8,4,-4) - (-2,1,-1) = (-6,3,-3)$

$\vec{DC} = C - D = (-5,4,0) - (-8,4,-4) = (3,0,4)$

$\vec{BC} = C - B = (-5,4,0) - (1,1,3) = (-6,3,-3)$

$\vec{AB} = \vec{DC}$ e $\vec{AD} = \vec{BC}$; logo, os 4 pontos formam um paralelogramo no $\mathbb{R}^3$.

A medida de sua área é dada por:

$$A = \|\vec{AB} \times \vec{AD}\| \quad ; \quad \text{onde:}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = \left|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 4 \\ -6 & 3 & -3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 3 & 0 \\ -6 & 3 \end{matrix}$$

$$= 0\cdot\vec{i} - 24\vec{j} + 9\vec{k} - 0\vec{k} - 12\vec{i} + 9\vec{j}$$

$$= -12\vec{i} - 15\vec{j} + 9\vec{k} = (-12, -15, 9)$$

Logo, $A = \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \sqrt{(-12)^2 + (-15)^2 + 9^2}$

$$= \sqrt{144 + 225 + 81} = \sqrt{430}$$

$$= \sqrt{45 \cdot 10} = \sqrt{9 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5} = 15\sqrt{2}$$

unidades de área