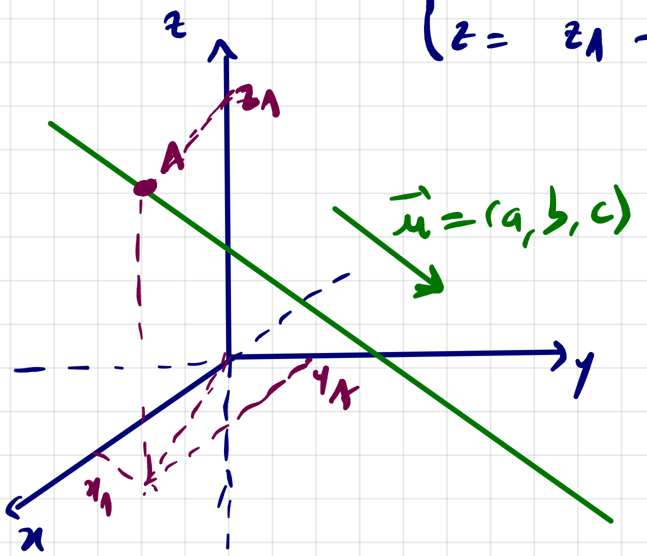
$\boxed{22/08/23}$

Lembrando; uma reta (r) no espaço que passa por um ponto A e possui como vetor diretor o vetor $\vec{u}=(a,b,c)$, possui equação, na forma paramétrica:

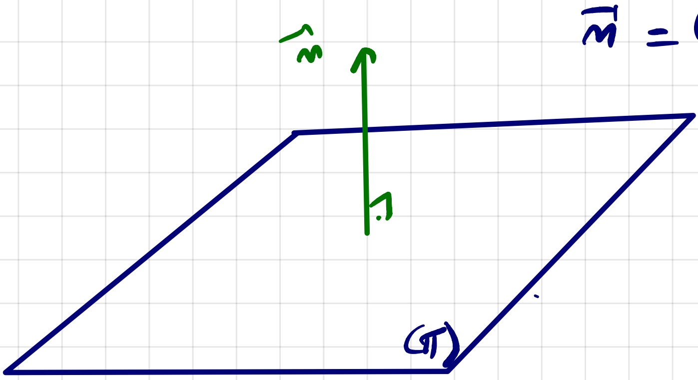
$$(r): \begin{cases} x = x_A + a t \\ y = y_A + b t \\ z = z_A + c . t \end{cases} \quad ; t \in \mathbb{R}$$



Também estudamos a eq. do plano (π):

$$(\pi): \underline{a}x+\underline{b}y+\underline{c}z+d=0$$; onde

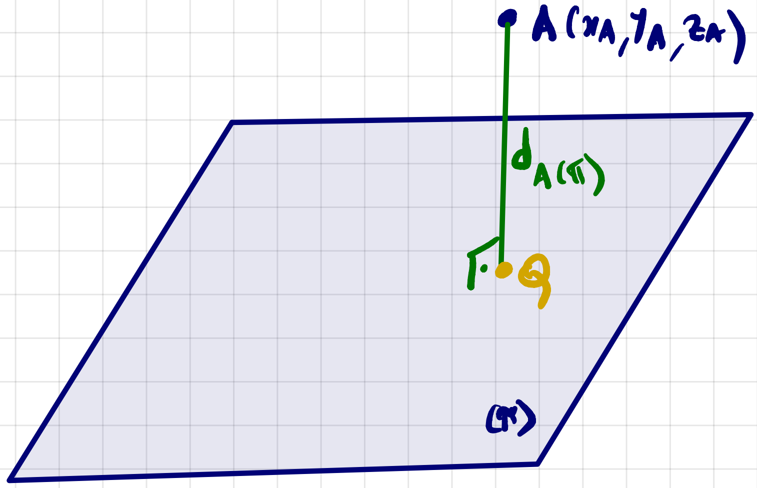
$\vec{n}=(a,b,c)$ é o vetor normal ao plano (π).



DISTÂNCIA DE UM PONTO A UM PLANO:

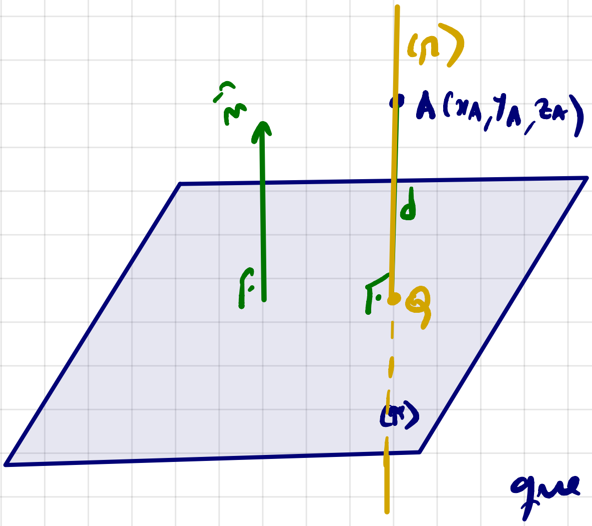
Dado um ponto $A(x_A, y_A, z_A)$ no $\mathbb{R}^3$ e um plano (π) de equação: $(\pi): ax+by+cz+d=0$, onde $A \notin (\pi)$.

Vamos determinar uma fórmula que nos permita medir a distância de um ponto a um plano.



$d_{A(\pi)} = ?$

Seja (r) a reta que passa por A e é perpendicular ao plano (π) [ou seja, a reta suporte ao plano, passando pelo ponto A]



$(\pi): ax+by+cz+d=0$

o vetor $\vec{n} = (a,b,c)$, que é o vetor normal ao plano, serve como vetor diretor para a reta (r)

Então, a eq. da reta (r) fica:

$$(r): \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + b\cdot t \\ z = z_A + ct \end{cases} \quad ; t \in \mathbb{R}.$$

Dessa forma, teremos que

$$d_{A(\pi)} = d_{AQ} \quad ; \quad \text{onde } Q = (r) \cap (\pi).$$

Logo, Q será a solução do sistema linear:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + c \cdot t \end{cases}$$

$$a \cdot (x_A + at) + b \cdot (y_A + bt) + c \cdot (z_A + c \cdot t) + d = 0$$

$$a \cdot x_A + a^2 t + b \cdot y_A + b^2 t + c \cdot z_A + c^2 t + d = 0$$

$$a \cdot x_A + b \cdot y_A + c \cdot z_A + d + (a^2 + b^2 + c^2)\, t = 0$$

$$\Rightarrow \quad t = -\frac{a \cdot x_A + b \cdot y_A + c \cdot z_A + d}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Assim, para este valor real para t obtemos as coordenadas do ponto Q:

$Q(x_Q, y_Q, z_Q)$, onde:

$$x_Q = x_A + at = x_A - a \cdot \left(\frac{a x_A + b y_A + c z_A + d}{a^2 + b^2 + c^2} \right)$$

$$y_Q = y_A + bt = y_A - b \cdot \left(\frac{a x_A + b y_A + c z_A + d}{a^2 + b^2 + c^2} \right)$$

$$z_Q = z_A + c \cdot t = z_A - c \left(\frac{a x_A + b y_A + c z_A + d}{a^2 + b^2 + c^2} \right)$$

Assim, obtemos:

$$d_{A(\pi)} = d_{AQ} = \sqrt{(x_A - x_Q)^2 + (y_A - y_Q)^2 + (z_A - z_Q)^2}$$

$$= \sqrt{\left[\cancel{x_A} - \cancel{x_A} + a\left(\frac{ax_A + by_A + cz_A + d}{a^2+b^2+c^2}\right)\right]^2 + \left[\cancel{y_A} - \cancel{y_A} + b\cdot\left(\frac{ax_A + by_A + cz_A + d}{a^2+b^2+c^2}\right)\right]^2 + \ldots}$$

$$\ldots \overline{+ \left[\cancel{z_A} - \cancel{z_A} + c\left(\frac{ax_A + by_A + cz_A + d}{a^2+b^2+c^2}\right)\right]^2} \, .$$

$$= \sqrt{a^2\left(\frac{ax_A + by_A + cz_A + d}{a^2+b^2+c^2}\right)^2 + b^2\left(\frac{ax_A + by_A + cz_A + d}{a^2+b^2+c^2}\right)^2 + c^2\left(\frac{ax_A + by_A + cz_A + d}{a^2+b^2+c^2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\cancel{(a^2+b^2+c^2)}\left(ax_A + by_A + cz_A + d\right)^2}{(a^2+b^2+c^2)^{\cancel{2}}}} = \frac{|a\cdot x_A + b\cdot y_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\Rightarrow d_{A(\pi)} = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

EXEMPLO: Encontre a distância do ponto $A(2,-1,1)$ ao plano (π) de equação (π): $\underline{x} + \underline{2}y - \underline{z} + 4 = 0$.

SOLUÇÃO: $d_{A(\pi)} = ?$

$(a,b,c) = (1,2,-1)$

$$d_{A(\pi)} = \frac{|a \cdot x_A + b \cdot y_A + c \cdot z_A + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{|1.(2) + 2.(-1) - 1.(1) + 4|}{\sqrt{1^2+(2)^2+(-1)^2}}$$

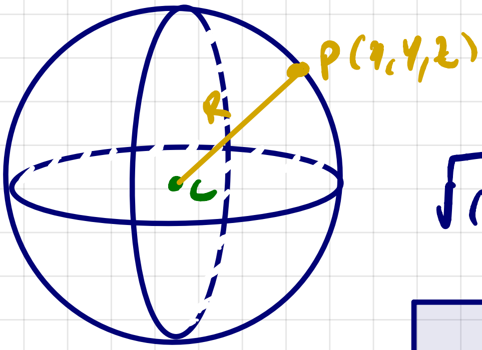
$$= \frac{|\cancel{2} - \cancel{2} - 1 + 4|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{3}{\sqrt{6}}$$

SUPERFÍCIE ESFÉRICA:

Chama-se superfície esférica (no $\mathbb{R}^3$) o conj. de todos os pontos do espaço, equidistantes a uma distância fixa $R>0$ de um ponto fixo $C(h, k, l)$ chamado de centro da superfície esférica.

[obs.: Nas listas onde está escrito "esfera" leia "superfície esférica".]

De posse da def. acima, então, dado $C(h, k, l)$ e $R>0$, então se $P(x, y, z)$ pertence à superfície esférica $(\mathcal{E})$, então:



$$d_{PC} = R$$

$$\sqrt{(x-x_C)^2+(y-y_C)^2+(z-z_C)^2} = R$$

$$\Rightarrow \boxed{(x-x_C)^2+(y-y_C)^2+(z-z_C)^2=R^2}$$

EQ. REDUZIDA DA ESFERA

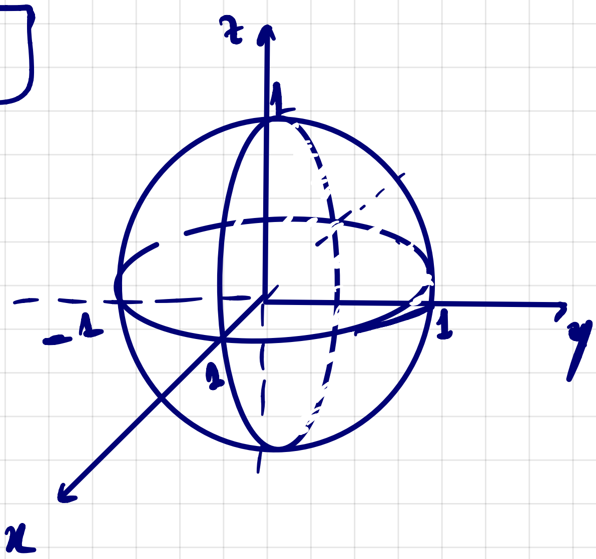
Ex.: Obtenha a eq. da superfície esférica de raio unitário e centro na origem.

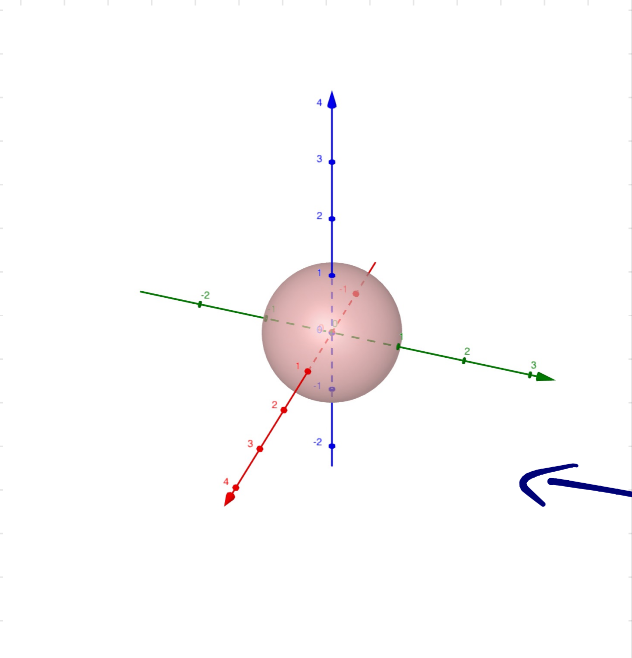
Solução: $R = 1$.

$C(0,0,0)$

$$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2 = 1^2$$

$$\boxed{x^2+y^2+z^2=1}$$





PELO GEOGEBRA.

02) LISTA 05, exercício 05: ACHE A EQ. DA SUPERFÍCIE ESFÉRICA CONCÊNTRICA À SUPERFÍCIE ESFÉRICA $x^2+y^2+z^2-2y+8z-9=0$ E TEM RAIO 3.

SOLUÇÃO: Como as duas "esferas" são concêntricas, possuem mesmo centro C.

$$x^2+\underline{y^2-2y}+\underline{z^2+8z}-9=0$$

$$x^2+(y-1)^2-1+(z+4)^2-16-9=0$$

$$(x-0)^2+(y-1)^2+(z-(-4))^2=26$$

$$C(0,1,-4)$$

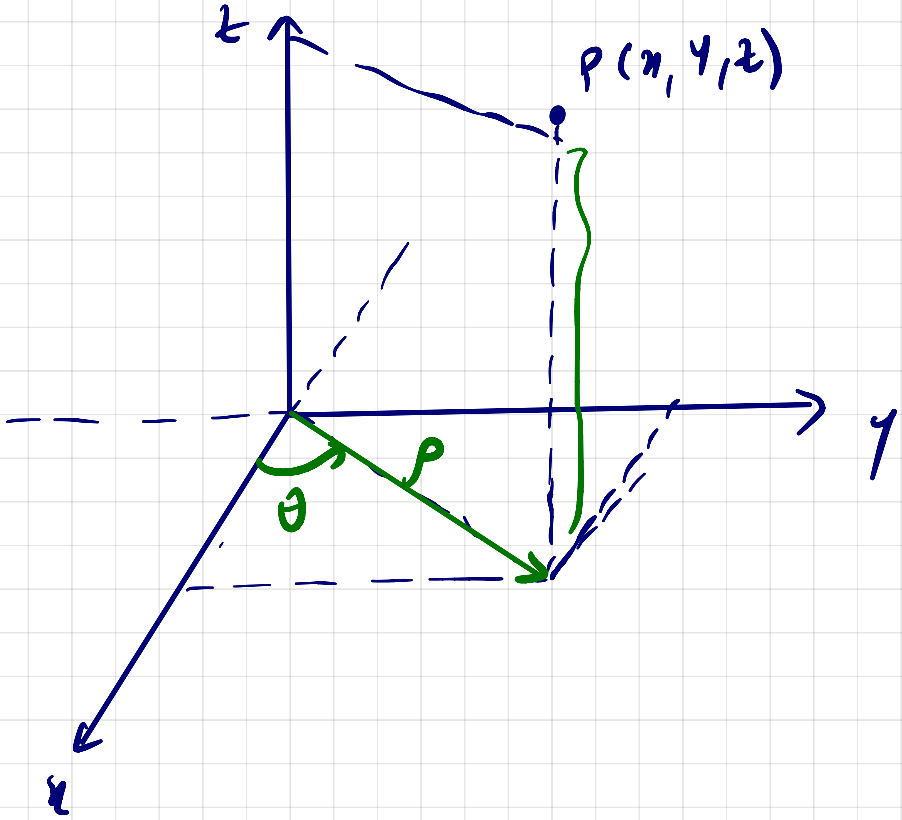
A eq. da esfera procurada será:

$$(x-0)^2+(y-1)^2+(z-(-4))^2=(3)^2$$

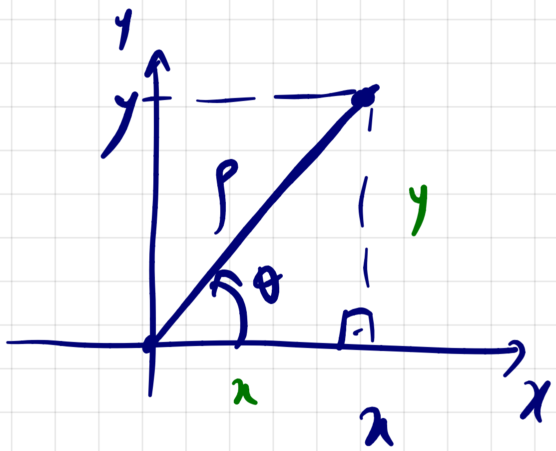
$$x^2+y^2-2y+1+z^2+8z+16=9$$

$$\boxed{x^2+y^2+z^2-2y+8z+8=0}$$

SISTEMA DE COORDENADAS CILÍNDRICAS:



Dado P(x, y, z) no sistema retangular; no sistema cilíndrico suas coordenadas serão P(ρ, θ, z); onde:



$$\cos\theta = \frac{x}{\rho} \Rightarrow x = \rho\cos\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\rho} \Rightarrow y = \rho \cdot \operatorname{sen}\theta .$$

SISTEMA POLAR NO PLANO xy

Ou seja, para converter do sist. polar para o retangular:

$$(\rho, \theta, z) \rightsquigarrow (x, y, z)$$

é tal que

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$$

Além disso, pelo T. de Pitágoras, no plano xy temos:

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

Ex.: O ponto $P\left(2, \frac{\pi}{6}, 4\right)$, no sistema cilíndrico: