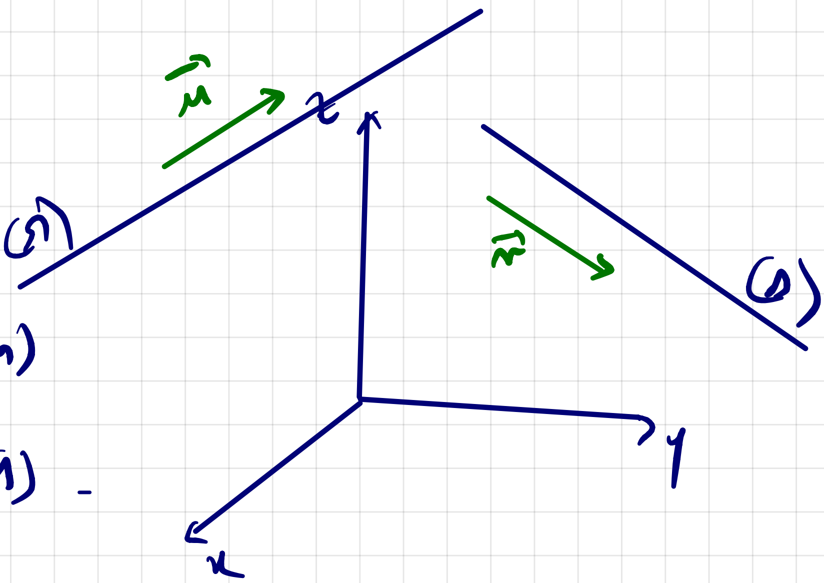
17/08/23

Na aula passada estudamos retas e planos. Vamos ver algumas considerações acerca desses assuntos.

ÂNGULO ENTRE DUAS RETAS NO $\mathbb{R}^3$:

Dadas (r) e (s) retas no $\mathbb{R}^3$; o ângulo θ entre elas será o ângulo formado por seus vetores diretores.



- $\vec{u}$: vetor diretor de (r)
- $\vec{v}$: vetor diretor de (s).

O ângulo θ formado por (r) e (s) será dado pela fórmula:

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$$

Ex.: Obtenha o ângulo formado pelas retas

(r): $(x-1, y+2, z) = t\cdot(1, 0, -1)$

$$(\Delta): \begin{cases} x = 2-3t \\ y = 1+t \\ z = -1+4t \end{cases}$$

<u>SOLUÇÃO</u>: $\vec{u} = (1, 0, -1)$

$\vec{n} = (-3, 1, 4)$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{n}\|} = \frac{(1,0,-1)\cdot(-3,1,4)}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2} \cdot \sqrt{(-3)^2+1^2+4^2}}$$

$$= \frac{1\cdot(-3)+0\cdot(1)+(-1)\cdot 4}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{9+1+16}} =$$

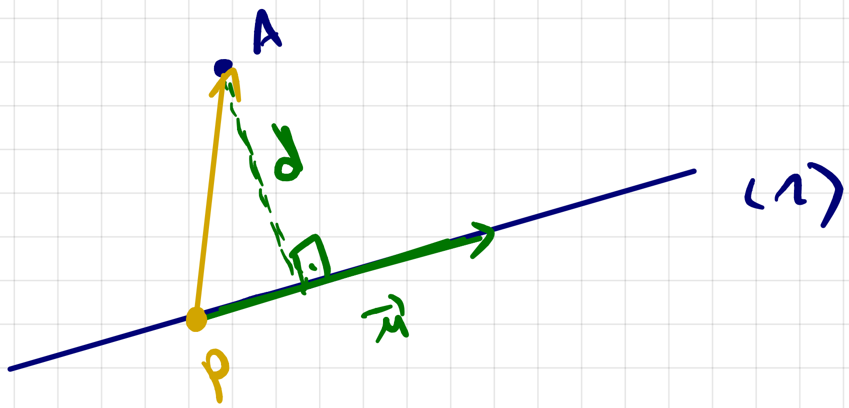
$$= \frac{-7}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{26}} = \frac{-7}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{13}} = \frac{-7}{2\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{-7}{2\sqrt{13}}}$$

DISTÂNCIA DE UM PONTO A UMA RETA DADA:

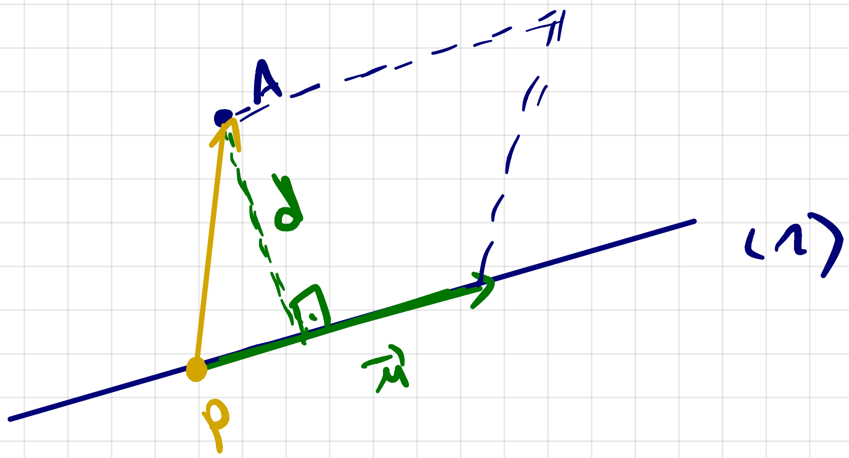
Seja (r) uma reta no espaço, com vetor diretor $\vec{u}$ e $A(x_A, y_A, z_A)$ fora da reta. Queremos determinar a distância d entre (r) e A, e vamos denotar por

$$d = d_{A(r)}$$



Seja P um ponto qualquer sobre a reta (r).

Então, os vetores $\vec{AP}$ e o vetor diretor $\vec{u}$ de (r) formam um paralelogramo.



A medida da área S desse paralelogramo será dada por:

$$S = \|\vec{u}\| \cdot d \qquad (*)$$

Por outro lado, tendo $\vec{u}$ e $\overrightarrow{AP}$, a área do mesmo paralelogramo pode ser calculada através do produto vetorial:

$$S = \|\vec{u} \times \overrightarrow{AP}\| \qquad (**)$$

De $(*)$ e $(**)$ obtemos:

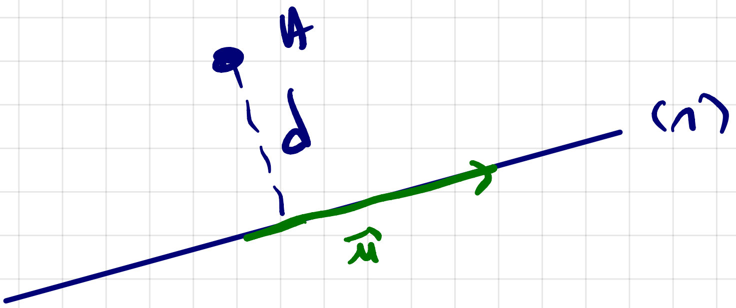
$$\|\vec{u}\| \cdot d = \|\vec{u} \times \overrightarrow{AP}\|$$

$$\Rightarrow \boxed{d = \frac{\|\vec{u} \times \overrightarrow{AP}\|}{\|\vec{u}\|}, \quad \forall P \in (r)}$$

Ex.: Determine a distância do ponto $A(1,-2,3)$ à reta (r) de equação:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{2-y}{4}, \quad z = 1$$

Solução:



$(r): \quad \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-4} \quad ; \quad z = 1$

$$\vec{u} = (2, -4, 0)$$

Se $x = 1$; então:

$$0 = \frac{1-1}{2} = \frac{y-2}{-4} \rightsquigarrow 0 = \frac{y-2}{4}$$

$$y = 2$$

Ou seja, determinamos um ponto

$$P(1, 2, 1) \in (r).$$

Assim, a distância d será:

$$d = \frac{\| \vec{u} \times \vec{AP} \|}{\| \vec{u} \|} \quad ; \quad \text{onde:}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(2)^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} \; ;$$

$$\vec{AP} = P - A = (1, 2, 1) - (1, -2, 3) = (0, 4, -2)$$

Disso:

$$\vec{u} \times \vec{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 2 & -4 \\ 0 & 4 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} - & - & - & + & + & + \end{matrix}$$

$$= 8\vec{i} + 0\vec{j} + 8\vec{k} - 0\vec{k} - 0\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$= 8\vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k} = (8, 4, 8)$$

$$\Rightarrow \|\vec{u} \times \vec{AP}\| = \sqrt{8^2 + 4^2 + 8^2} = \sqrt{144} = 12$$

Assim, a distância d será:

$$\underset{\sim}{d} = \frac{\|\vec{u} \times \vec{AP}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{12}{\sqrt{20}} = \frac{12}{2\sqrt{5}} = \underset{\sim}{\frac{6}{\sqrt{5}}}$$

INTERSEÇÃO DE PLANOS:

Dados dois planos (α) e (β) no $\mathbb{R}^3$, a interseção $(\alpha) \cap (\beta)$ será a solução do sist. linear por eles formado; que será uma reta ou vazia, ou o plano todo.

EXEMPLO: Obtenha a interseção entre os planos (α) e (β) de equações:

$(\alpha): x - 2y + z - 1 = 0$

$(\beta): 2x + y - 2z + 2 = 0$

solução: $(\alpha) \cap (\beta)$ será a solução do sist. linear:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y - 2z = -2 \end{cases} \qquad x = 1 + 2y - z$$

$$2.(1 + 2y - z) + y - 2z = -2$$

$$2 + 4y - 2z + y - 2z = -2$$

$$5y - 4z = -4$$

$$\boxed{y = \frac{4z - 4}{5}}$$

$$x = 1 + 2y - z$$

$$x = 1 + 2.\left(\frac{4z - 4}{5}\right) - z$$

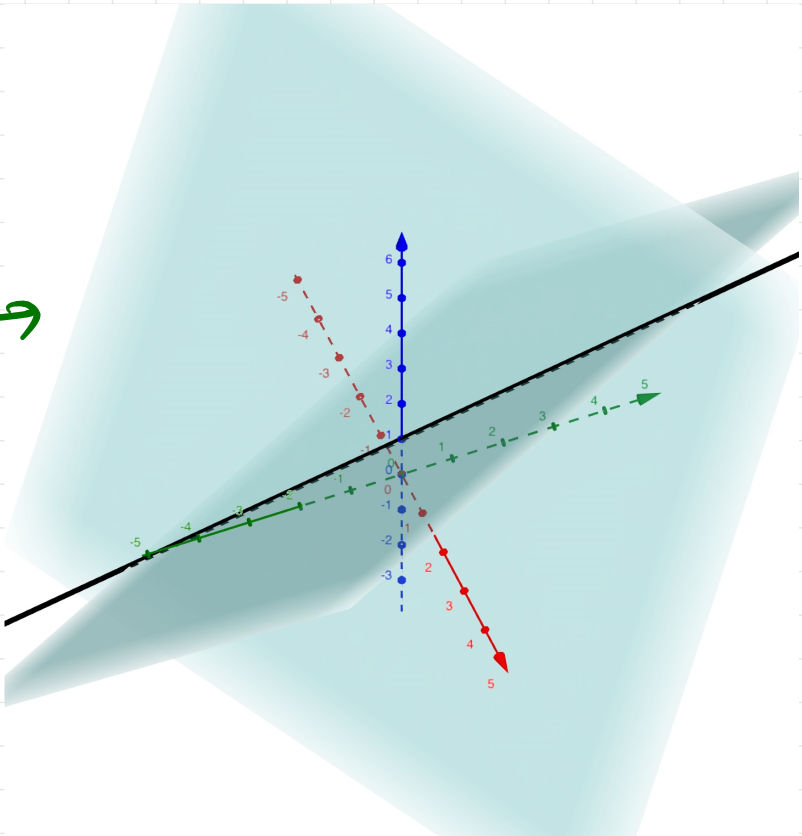
$$x = \frac{5 + 8z - 8 - 5z}{5}$$

$$\boxed{x = \frac{3z - 3}{5}}$$

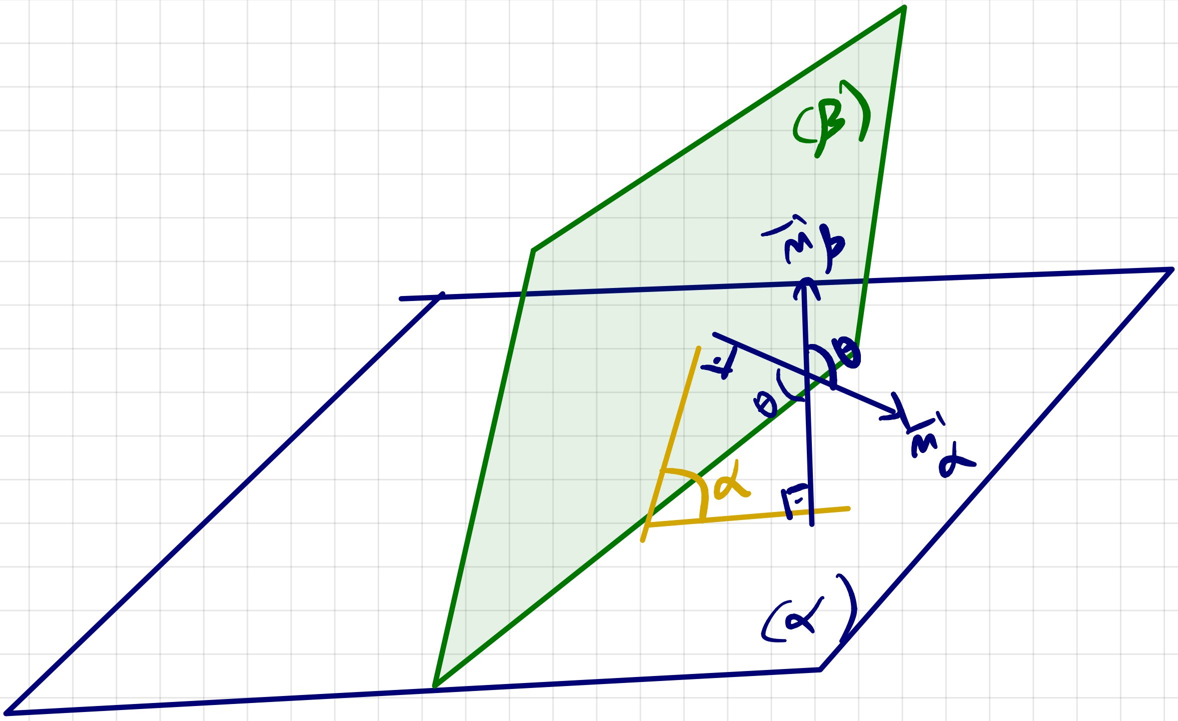
Escreva $z = t$. Então:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{3}{5} + \dfrac{3}{5}t \\ y = -\dfrac{4}{5} + \dfrac{4}{5}t \\ z = t \end{cases}$$

PELO GEOGEBRA.



COMO OBTER O ÂNGULO ENTRE PLANOS?



$\alpha = ?$

$\vec{n}_\alpha$ – vetor normal a (α)

$\vec{n}_\beta$ – vetor normal a (β)

θ é o ângulo entre os vetores normais.

$$90^\circ + 90^\circ + \alpha + \theta = 360^\circ$$

$$\alpha + \theta = 180^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - \theta$$

$$\cos\alpha = \cos(180^\circ - \theta)$$

$$= \underbrace{\cos 180^\circ}_{-1} \cdot \cos\theta + \underbrace{\operatorname{sen} 180^\circ}_{0} \cdot \operatorname{sen}\theta$$

$$\cos\alpha = -\cos\theta = -\frac{\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta}{\|\vec{n}_\alpha\| \cdot \|\vec{n}_\beta\|}$$