23/05/23 – AULA 18

TEOREMA (TEOR. DO SANDUÍCHE PARA FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS)

Sejam $f, g, h : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $a \in A'$ (i.e., $a \in \mathbb{R}^m$ é um ponto de acumulação do conj. A), tais que, $\forall x \in A$: $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

Se $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$, então

$$\exists \lim_{x \to a} g(x) = L.$$

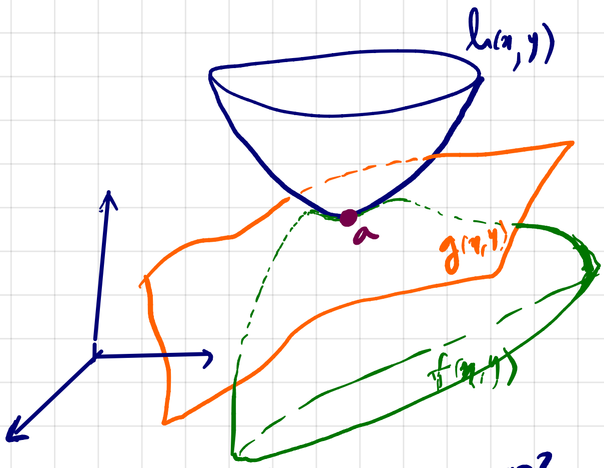


ILUSTRAÇÃO NO CASO $\mathbb{R}^2$

DEMONSTR.: Sejam f, g e h funções do $\mathbb{R}^m$ nas hipóteses do teorema. Dado $\varepsilon > 0$.

Como $\lim_{x \to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$, então, $\exists \delta_1 > 0$ tal que,

$$\forall x \in A : 0 < d(x,a) < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \quad (*)$$

Do mesmo modo, como

$\lim_{x \to a} h(x) = L$, segue que

$\exists \delta_2 > 0$ tal que

$$\forall x \in A : 0 < d(x,a) < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - L| < \varepsilon. \quad (**)$$

Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Assim, $\forall x \in A$: $0 < d(x,a) < \delta$, valem $(*)$ e $(**)$. Disso, vamos estimar $|g(x) - L|$ do seguinte modo:

Como por hipótese vale que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad \forall x \in A \subset \mathbb{R}^m;$$

então

$$f(x) - L \leq g(x) - L \leq h(x) - L$$

De $(*)$; $|f(x) - L| < \varepsilon$, i.e.:

$$-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$$

De $(**)$, $|h(x) - L| < \varepsilon$; i.e:

$$-\varepsilon < h(x) - L < \varepsilon$$

Disso:

$$-\varepsilon < f(x) - L \leq g(x) - L \leq h(x) - L < \varepsilon,$$ ou

seja,

$$-\varepsilon < g(x) - L < \varepsilon,$$ sempre que

$0 < d(x,a) < \delta$, concluindo que $\lim_{x \to a} g(x) = L$.

$\square$

EX-! LISTA 06 - EXERCÍCIO 07:

SABENDO QUE $1 - \frac{x^2y^2}{3} < \frac{\arctan xy}{xy} < 1$, O QUE

SE PODE DIZER SOBRE

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arctan xy}{xy} \, ?$$ JUSTIFIQUE.

SOLUÇÃO: Vamos usar aqui o T. do Sanduíche.

$$\underbrace{1 - \frac{x^2y^2}{3}}_{= f(x,y)} < \underbrace{\frac{\arctan xy}{xy}}_{= g(x,y)} < \underbrace{1}_{= h(x,y)}.$$

Note que

$$\begin{cases} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 1 - \frac{x^2y^2}{3} = 1 \\ \\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 1 = 1. \end{cases}$$

Estamos, portanto, nas hipóteses do T. do Sanduíche, donde segue que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 1,$$ ou seja,

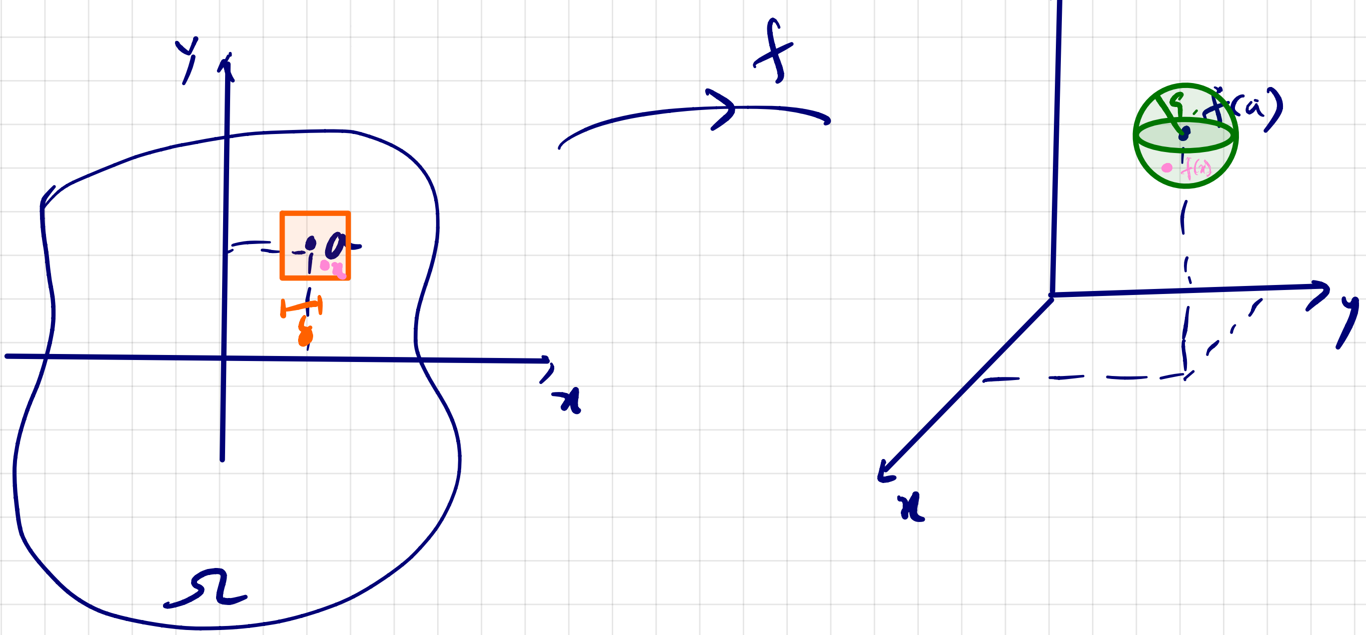
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arctan xy}{xy} = 1.$$

CONTINUIDADE:

Def.: Seja $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função. Dizemos que f é contínua no ponto $a \in A$ se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que, $\forall x \in A$ tal que

$$x \in B_\delta(a), \text{ implica em } f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$$

Ex.: $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$



Quando $a \in A \cap A'$, ou seja, $a \in A \subset \mathbb{R}^m$ também for um ponto de acumulação do conj. A, então f será contínua em a se, e somente se

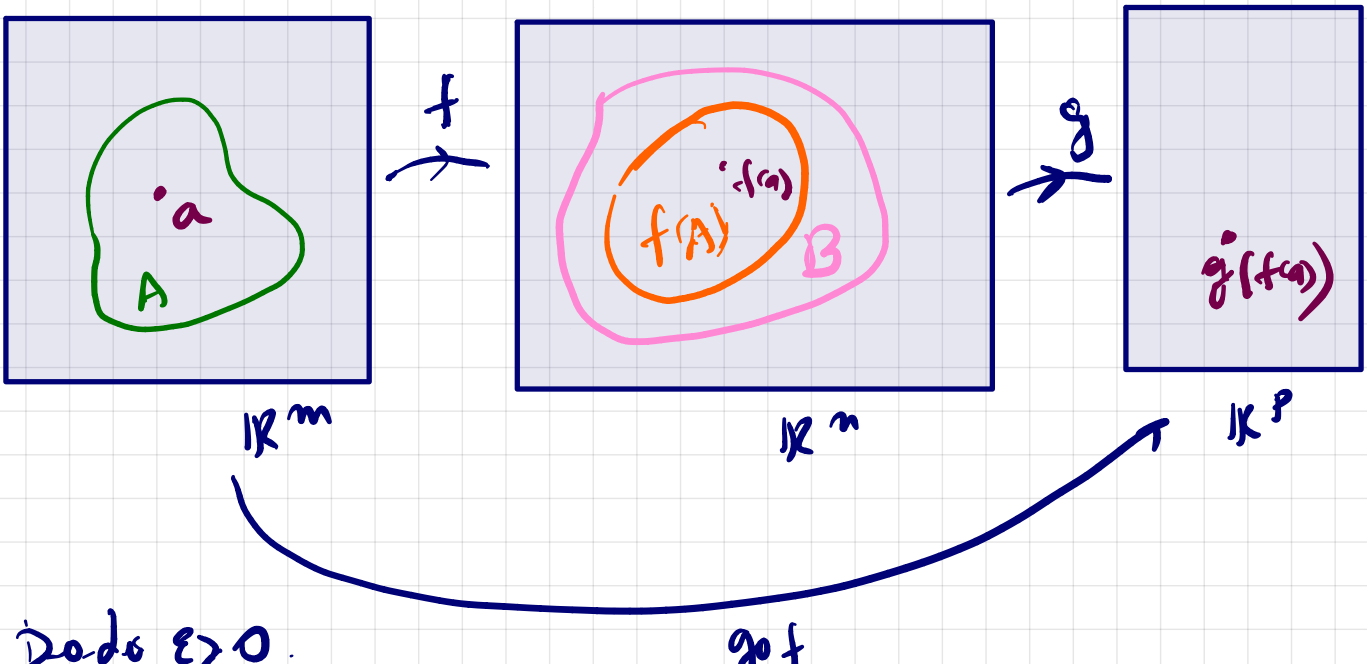
$$\exists \lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

ou seja se, e só se, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que, $\forall x \in A$ tal que $d(x,a) < \delta \Rightarrow d_*(f(x), f(a)) < \varepsilon$

Def.: Uma função $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é cont. em A se for contínua em todos os pontos do seu domínio A.

PROPOSIÇÃO: A composição de funções contínuas é uma função contínua.

DEMONSTR.: Sejam $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $g: B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ funções tais que $f(A) \subset B$, $a \in A$ um ponto qualquer.



Dado $\varepsilon > 0$.

Como g é contínua, em particular é cont. em $f(a)$. Então, $\exists\, \delta_1 > 0$ tal que, $\forall\, y \in B_{\delta_1}(f(a))$

$$\Longrightarrow g(y) \in B_{\varepsilon}(g(f(a)))$$

Como f é contínua, $\exists\, \delta > 0$ tal que

$\forall\, x \in B_{\delta}(a) \Longrightarrow f(x) \in B_{\delta_1}(f(a))$, onde $f(x) = y$.

Ou seja, para $\varepsilon>0$ dado, obtemos $\delta>0$ tal que, $\forall x\in B_\delta(a) \Rightarrow g(y)=g(f(x)) \in B_\varepsilon(g(f(a)))$

$$g(f(x)) = (g\circ f)(x)$$

Ou seja, $g\circ f$ é contínua em $x=a$.
Pela arbitrariedade da escolha do ponto $a\in A$, segue que $g\circ f$ é contínua.

$\square$

PROPOSIÇÃO: Se $f,g : A\subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$ são contínuas, então $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, f/g são contínuas.
Na f/g a continuidade é no domínio onde $g(x)\neq 0$.

DEMONSTR.: EXERCÍCIO.

TEOREMA DE WEIERSTRASS (T. DO VALOR EXTREMO)

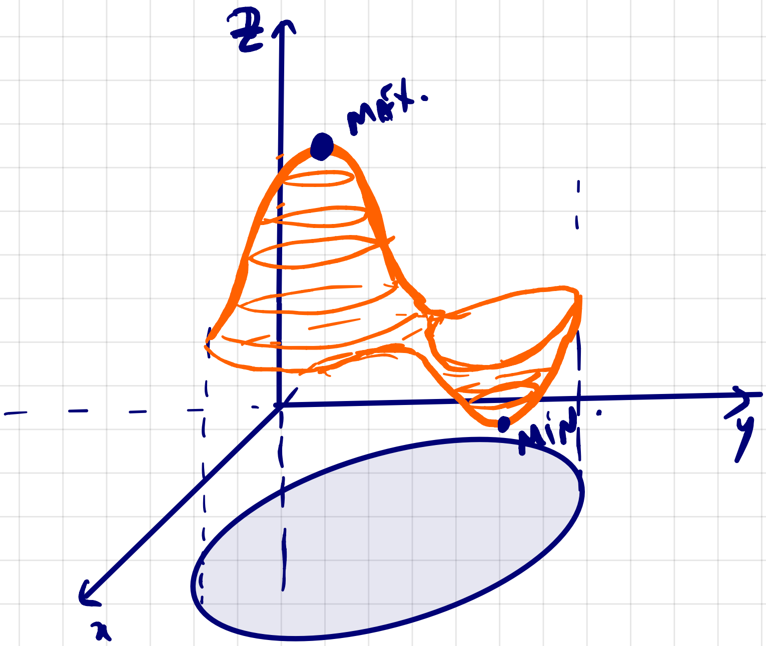
Seja $f:\Omega\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ uma função contínua num compacto(*) Ω do $\mathbb{R}^m$. Então, f assume valores máximo e mínimo em Ω.

DEMONSTR.: É visto em curso de ANÁLISE no $\mathbb{R}^n$.

(*) Um conj. $X\subset\mathbb{R}^m$ é um COMPACTO de X quando for limitado e fechado.

$f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Ω — COMPACTO



---

voltando ao estudo de limites, agora pensando em funções $f: [a,b] \to \mathbb{R}^m$ (FUNÇÕES VETORIAIS)

$f: \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$; $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t))$

$a \in \Omega'$. Então:

$\lim\limits_{t \to a} f(t) = \ell \in \mathbb{R}^m$; onde $\ell = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n)$

se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$\forall t \in \Omega$ tal que $0 < |t-a| < \delta \Rightarrow d_2(f(t), \ell) < \varepsilon$

i.e.; $\sqrt{(f_1(t)-\ell_1)^2 + (f_2(t)-\ell_2)^2 + \cdots + (f_n(t)-\ell_m)^2} < \varepsilon$.

PROPOSIÇÃO:

$$\lim_{t\to a} f(t) = \left(\lim_{t\to a} f_1(t), \lim_{t\to a} f_2(t), \dots, \lim_{t\to a} f_n(t)\right)$$

[ou seja, o limite de uma função vetorial consiste em calcular o limite de cada função coordenada]

DEMONSTR.: Seja $\lim_{t\to a} \vec{f}(t) = l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$

Então, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que, $\forall\, t \in \Omega$ tal que

$0 < |t-a| < \delta$, implica em:

$d_2(f(t) - l) < \varepsilon$, ou seja,

$$\sqrt{(f_1(t)-l_1)^2 + (f_2(t)-l_2)^2 + \dots + (f_n(t)-l_n)^2} < \varepsilon.$$

Logo, $\sqrt{(f_1(t)-l_1)^2} < \varepsilon$, ..., $\sqrt{(f_n(t)-l_n)^2} < \varepsilon$,

i.e., $|f_1(t) - l_1| < \varepsilon$, ..., $|f_n(t) - l_n| < \varepsilon$,

sempre que $0 < |t-a| < \delta$; ou seja, mostramos que

$$\lim_{t\to a} f_i(t) = l_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

donde segue que

$$\left(\lim f_1(t), \ldots, \lim f_n(t)\right) = (l_1, \ldots, l_n)$$

$$\parallel$$

$$\lim_{t \to a} f(t)$$

$\square$

Ex: Calcule $\displaystyle\lim_{t \to 1} \left(\frac{t^2-1}{t-1}, \frac{\sqrt{t+3}-2}{2t-2} \right)$

Solução: exercício.