18/08/23 (AULA 17)

Vejamos outro exemplo:

02) Mostrar que $\lim_{(x,y)\to(1,2)} (3x-2y) = -1$.

$$\left[f(x,y) = 3x - 2y \quad ; \quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \right]$$

Dado $\varepsilon > 0$, precisamos encontrar $\delta > 0$ tal que, $\forall (x,y)$ tal que: $0 < d_2((x,y);(1,2)) < \delta \Rightarrow |f(x,y) - (-1)| < \varepsilon$.

Avaliando $|f(x,y)+1|$:

$$|f(x,y)+1| = |3x - 2y + 1| \qquad (*)$$

Devemos ter: $0 < d_2((x,y),(1,2)) < \delta$

$$0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta$$

[então, de algum modo, precisaremos fazer aparecer $x-1$ e $y-2$ em $(*)$]

$$|f(x,y)+1| = |3x - 2y + 1| = |3x - 3 + 3 - 2y + 1|$$

$$= |3x - 3 - 2y + 4| = |3(x-1) - 2(y-2)| \leq$$

$$\leq 3.|x-1| + 2|y-2| = 3.\sqrt{(x-1)^2} + 2.\sqrt{(y-2)^2} \leq$$

$$|a| = \sqrt{a^2}$$

$$\leq 3.\underbrace{\sqrt{\underbrace{(x-1)^2+(y-2)^2}_{\geq 0}}}_{<\delta} + 2\underbrace{\sqrt{\underbrace{(x-1)^2}_{\geq 0}+(y-2)^2}}_{<\delta} < 3\delta+2\delta = 5\delta := \varepsilon$$

Então, basta tomar $\boxed{\delta = \frac{\varepsilon}{5}}$

Isto prova que $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = -1$.

$\square$

TEOREMA: O limite de uma função a várias variáveis, se existir, é único.

Mais precisamente, se $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ função, $a \in \mathbb{R}^m$ um ponto de acumulação do conjunto A, i.e., $a \in A'$ (A' é o conj. de todos os pontos de acumulação do conj. A, e é chamado de DERIVADO do conj. A); então, sendo

$$\lim_{x\to a} f(x) = l_1 \quad e \quad \lim_{x\to a} f(x) = l_2,$$

segue que $l_1 = l_2$.

DEMONSTR.: Sejam $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_2$

Vamos mostrar que $l_1 = l_2$.

Por absurdo, suponha que $l_1 \neq l_2$.

Tome $\varepsilon = d(l_1, l_2) > 0$.

Como $\lim_{x\to a} f(x) = \ell_1$, então para o $\varepsilon > 0$ acima,

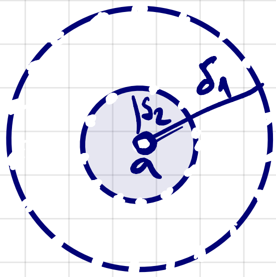
segue que $\exists\, \delta_1 > 0$ tal que: $\forall x \in A$ tal que

$$0 < d(x,a) < \delta_1 \implies |f(x) - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (*)$$

Do mesmo modo, como $\lim_{x\to a} f(x) = \ell_2$, segue que

$\exists\, \delta_2 > 0$, tal que, $\forall x \in A$ tal que

$$0 < d(x,a) < \delta_2 \implies |f(x) - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (**)$$



Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$.

Assim, valem, $\forall x \in A$ tal que $0 < d(x,a) < \delta$, simultaneamente, $(*)$ e $(**)$.

Então, $\forall x \in A$: $0 < d(x,a) < \delta$, segue que

$$\varepsilon = d(\ell_1, \ell_2) \leq d(f(x), \ell_1) + d(f(x), \ell_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

DESIGUALDADE TRIANGULAR DA MÉTRICA

Ou seja, "concluímos" que $\varepsilon < \varepsilon$, um absurdo!

Portanto, $\ell_1 = \ell_2$. $\square$

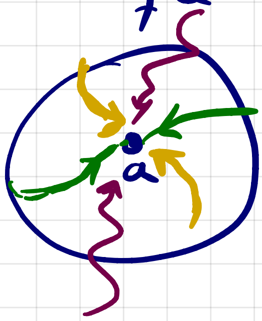
Propriedades aritméticas dos limites estudados no cálculo I seguem para funções de várias variáveis, com as suas devidas adaptações.$^{(*)}$

Por exemplo; sendo $f, g: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$;

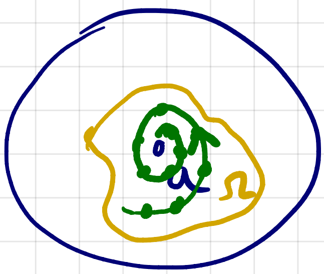
se $\lim_{x\to a} f(x) = l$ e $\lim_{x\to a} g(x) = m$,

então $\lim_{x\to a} \left(f(x) + g(x)\right) = l + m$.

No que segue, vamos obter um resultado que, no caso na reta equivale ao conceito de limites laterais. Obviamente, não vai fazer sentido escrever $x \to a^+$ ou $x \to a^-$ no $\mathbb{R}^m$. O que faremos é $x \to a$ por "algum caminho."



TEOREMA: Seja $f: A \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função, $\Omega \subset A$, $a \in A' \cap \Omega'$ (ou seja $a \in \mathbb{R}^m$ é um ponto de acumulação do conj. A e do conj. Ω). Se $\lim_{x\to a} f(x) = l$, então $\lim_{\substack{x\to a \\ x\in\Omega}} f(x) = l$.



(*) POR EXEMPLO, NÃO VAI TER SENTIDO $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = l \cdot m$, POIS O QUE SERIA $l \cdot m$? PRODUTO ESCALAR?

DEMONSTR.: Como $\lim_{x\to a} f(x) = l$, então, dado $\varepsilon > 0$,

$\exists \delta > 0$ tal que, $\forall x \in A : 0 < d_{\mathbb{R}^m}(x, a) < \delta \Rightarrow d_{\mathbb{R}^n}(f(x), l) < \varepsilon$

Em particular, para $x \in \Omega$ como $a \in \Omega'$;

$$0 < d_{\mathbb{R}^m}(x, a) < \delta \quad (I)$$

Logo $d_{\mathbb{R}^n}(f(x), l) < \varepsilon$, $\forall x \in \Omega$ cumprindo (I).

Ou seja, $\lim_{\substack{x\to a \\ x \in \Omega}} f(x) = l$.

COROLÁRIO: Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ função $a \in \mathbb{R}^m$ ponto de acumulação do conj. A. Sejam Ω e Λ subconjuntos de A tais que $a \in \Omega'$ e $a \in \Lambda'$.

Se $\lim_{\substack{x\to a \\ x \in \Omega}} f(x) \neq \lim_{\substack{x\to a \\ x \in \Lambda}} f(x)$, então $\nexists \lim_{x\to a} f(x)$.

[O EQUIVALENTE A ESTE RESULTADO EM $\mathbb{R}$ É:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x\to a} f(x).$$]

DEMONSTR.: Por absurdo, se $\exists \lim_{x\to a} f(x) = l$, então pelo teorema acima, sendo $\Omega, \Lambda \subset A$, $a \in \Omega' \cap \Lambda' \cap A'$ (ou seja, a é ponto de acumulação dos 3 conjuntos — aqui Ω e Λ são, de fato, caminhos), então,

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in \Omega}} f(x) = \ell \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x \in \Lambda}} f(x) = \ell,$$

uma contradição com a hipótese de que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in \Omega}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \to a \\ x \in \Lambda}} f(x).$$

Portanto, $\nexists \lim_{x \to a} f(x)$. $\square$

EXEMPLOS:

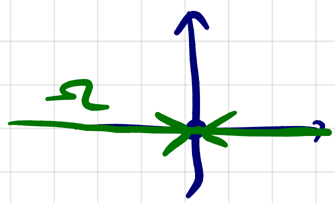
01) $f(x,y) = \dfrac{5xy^2}{x^3+y^3}$, se $(x,y) \neq (0,0)$

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$$

Perguntamos: $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

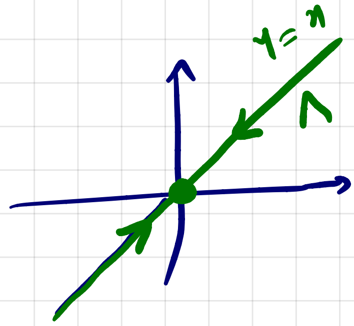
Vamos tomar caminhos diferentes passando por $(0,0)$ e verificar se os limites resultam em respostas diferentes. Se isto acontecer, então segue do corolário acima que $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

• $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$



Neste caso, teremos:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\Omega}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{5xy^2}{x^3+y^3} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{5x\cdot 0}{x^3+0} = 0$$



- $\Lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$.

Neste caso, teremos:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\Lambda}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{5xy^2}{x^3+y^3} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{5\cdot x\cdot x^2}{x^3+x^3}$$

$$= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{5\cancel{x^3}}{2\cancel{x^3}} = \frac{5}{2}$$

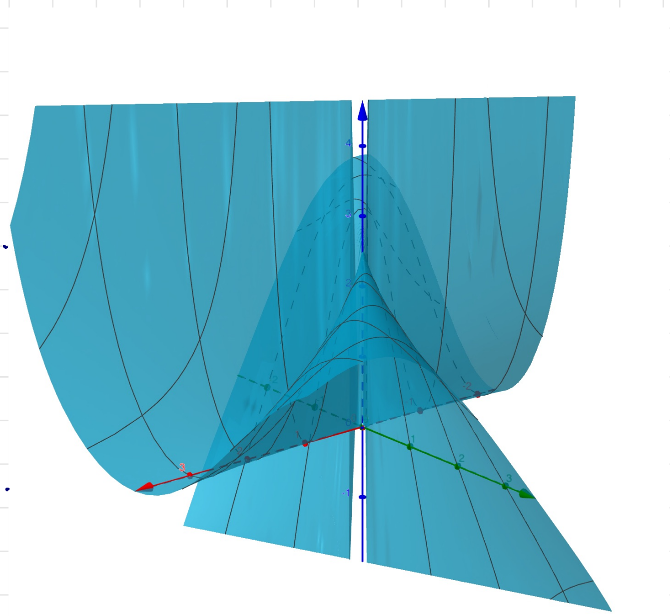
Como $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\in\Omega}} f(x,y) = 0 \neq \frac{5}{2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\in\Lambda}} f(x,y)$,

segue que $\displaystyle\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

PELO GEOGEBRA: →

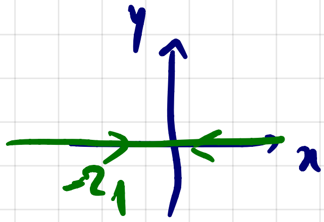
VEMOS QUE, PERTO DE (0,0)

A FUNÇÃO f NÃO TEM LIMITE.



02) $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$; $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$

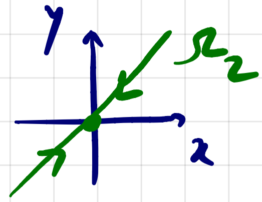
$$\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \; ?$$



• $\Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$.

Então:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\Omega_1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=0}} \frac{x\cdot y^2}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=0}} \frac{0}{x^2} = 0$$

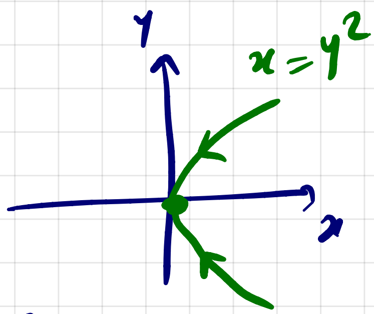


• $\Omega_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$

Então:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\Omega_2}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=x}} \frac{x\,y^2}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=x}} \frac{x^{\cancel{3}}}{2\cancel{x^2}}$$

$$= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=x}} \frac{x}{2} = 0$$



• $\Omega_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\}$

Então:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\Omega_3}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x=y^2}} \frac{x\,y^2}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x=y^2}} \frac{y^2 y^2}{y^2+y^2}$$

$$= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}} \frac{y^{\cancel{4}}}{2\cancel{y^2}} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}} \frac{y^2}{2} = 0$$

Vimos que por 3 caminhos diferentes Ω_1, Ω_2 e Ω_3, resultou no mesmo limite. Isto SUGERE que o limite existe e seja o valor comum (no caso, zero). Então, provemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x y^2}{x^2+y^2} = 0.$$

Dado $\varepsilon>0$, precisamos encontrar $\delta>0$, tal que, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, tal que $0 < d_2((x,y);(0,0)) < \delta \Rightarrow |f(x,y) - 0| < \varepsilon$.

$$\Updownarrow$$

$$0 < \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} < \delta$$

$$\propto \sqrt{x^2+y^2} < \delta \quad (*)$$

Avaliando $|f(x,y) - 0|$:

$$|f(x,y) - 0| = |f(x,y)| = \left|\frac{x y^2}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x| \cdot y^2}{x^2+y^2} \leq$$

$$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\leq \frac{\sqrt{x^2+y^2} \cdot y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2} \cdot \cancel{(y^2+x^2)}}{\cancel{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}.$$

$$y^2 \leq y^2+x^2$$

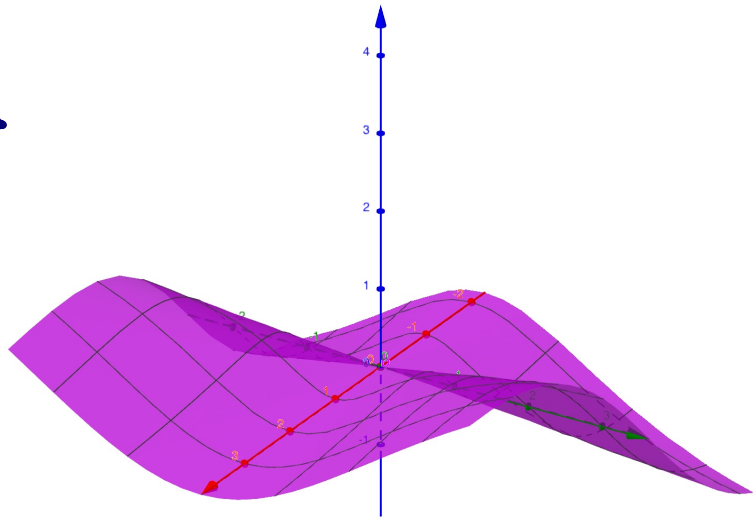
Portanto:

$$|f(x,y) - 0| \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta := \varepsilon.$$

por $(*)$

Ou seja, basta tomar $\delta = \varepsilon$. $\square$

PELO GEOGEBRA.



NESTE CASO, VEMOS QUE, O GRÁFICO DE f, POR QUALQUER CAMINHO EM QUE $(x,y) \to (0,0)$, A IMAGEM TENDE A ZERO, DEVIDO À "SUAVIDADE" DO GRÁFICO DA SUPERFÍCIE PERTO DA ORIGEM.