30/08/23 — AULA 20

No aula passada estudamos o teorema de Green no plano:

$\vec{F} = (P, Q)$ campo vetorial do $\mathbb{R}^2$; com derivadas parciais contínuas; γ curva simples fechada, seccionalmente suave. Então:

$$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_{\underset{\text{int}(\gamma)}{\Omega}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

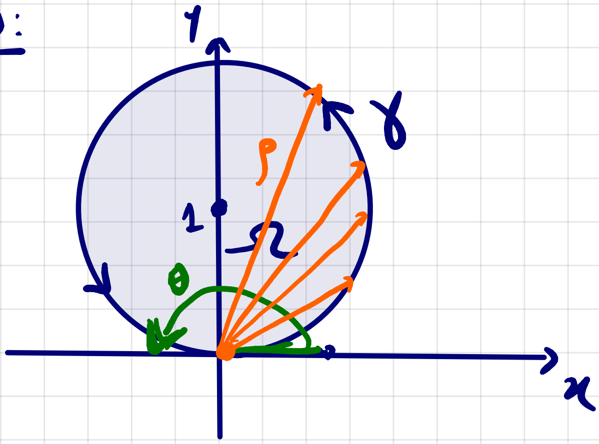
$$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = \oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Vejamos um segundo exemplo de aplicação:

02) Calcule $\oint_\gamma \vec{F}\,d\vec{r}$, ao longo da circunferência $x^2 + (y-1)^2 = 1$, no sentido anti-horário, sendo o campo vetorial $\vec{F}$ dado por

$$\vec{F}(x,y) = \left(4x^2 - 9y,\ 9xy + \sqrt{y^2+1}\right)$$

SOLUÇÃO:



$$\oint_\gamma \vec{F}\,d\vec{r} = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy =$$

$$= \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$0 \leq \theta \leq \pi$

ρ: de 0 até a circunf.

$$\left.\begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \end{array}\right\}$$ COORD. POLARES

Na eq. da circunferência, teremos:

$$x^2 + (y-1)^2 = 1$$

$$(\rho\cos\theta)^2 + (\rho\,\text{sen}\,\theta - 1)^2 = 1$$

$$\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\text{sen}^2\theta - 2\rho\,\text{sen}\,\theta + \cancel{1} = \cancel{1}$$

$$\rho^2\underbrace{(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta)}_{=1} = 2\rho\,\text{sen}\,\theta$$

$$\rho^{\cancel{2}} = 2\cancel{\rho}\,\text{sen}\,\theta \Rightarrow \boxed{\rho = 2\,\text{sen}\,\theta}$$

EQ. DA CIRCUNF. DADA, EM COORD. POLARES

ρ: de 0 até $2\,\text{sen}\,\theta$.

Além disso;
$$\vec{F} = (\underbrace{4x^2 - 9y}_{P(x,y)},\ \underbrace{9xy + \sqrt{y^2+1}}_{Q(x,y)})$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 9y \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -9$$

Assim, c.f. T. de Green:

$$\oint_\gamma \vec{F}\,d\vec{r} = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_\Omega (9y + 9)\,dx\,dy$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=2\,\text{sen}\,\theta} 9\cdot(\rho\,\text{sen}\,\theta - 1)\cdot\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left[\int_{\rho=0}^{\rho=2\,\text{sen}\,\theta} (9\rho^2 \cdot \text{sen}\,\theta - 9\rho)\,d\rho \right] d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left(3\rho^3 \,\text{sen}\,\theta - \frac{9\rho^2}{2} \right) \Bigg|_{\rho=0}^{\rho=2\,\text{sen}\,\theta} d\theta =$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left(24\,\text{sen}^3\theta \cdot \text{sen}\,\theta - 18\,\text{sen}^2\theta - 0\right) d\theta$$

$$= 24\int_0^\pi \underbrace{\text{sen}^2\theta}_{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} \cdot \underbrace{\text{sen}^2\theta}_{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}\, d\theta - 18\int_0^\pi \underbrace{\text{sen}^2\theta}_{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}\,d\theta =$$

$(\ldots)$ exercício.

TEOREMA: Seja γ curva fechada simples seccionalmente suave e $\Omega = \text{int}(\gamma)$. Então, a área A da região Ω é dada por:

$$A = \frac{1}{2} \oint_\gamma x\,dy - y\,dx$$

DEMONSTR.: Neste caso, $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$, onde

$$P(x,y) = -y \quad \text{e} \quad Q(x,y) = x$$

Pelo T. de Green: , sendo $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1$ e $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -1$;

$$\oint_\gamma x\,dy - y\,dx = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

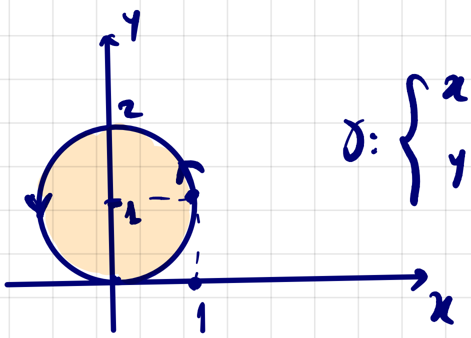
$$= \iint_\Omega (1-(-1))\,dx\,dy$$

$$= 2\iint_\Omega dx\,dy$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{2} \oint_\gamma x\,dy - y\,dx = \iint_\Omega dx\,dy = \text{área de } \Omega.$$

Ex: Calcule a área interna da região Ω definida pela circunferência $x^2+(y-1)^2=1$.

Solução:



$$\gamma: \begin{cases} x = \cos t \Rightarrow dx = -\operatorname{sen} t\,dt \\ y = \operatorname{sen} t + 1 \Rightarrow dy = \cos t\,dt \end{cases}$$

$$A = \frac{1}{2}\oint_\gamma x\,dy - y\,dx$$

$$x^2 + (y-1)^2 = \cos^2 t + (\operatorname{sen} t + \cancel{1} - \cancel{1})^2 = 1$$

$$t \in [0, 2\pi]$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos t \cdot \cos t\,dt - (\operatorname{sen} t + 1)\cdot(-\operatorname{sen} t\,dt)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big(\underbrace{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}_{=1} + \operatorname{sen} t\big)\,dt =$$

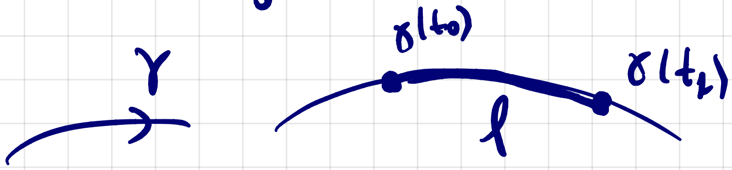
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\sin t)\,dt = \frac{1}{2}(t-\cos t)\Big|_0^{2\pi} =$$

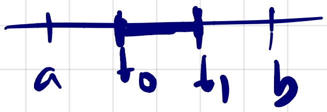
$$\frac{1}{2}\cdot\left[2\pi - 1 - (0-1)\right] = \pi \text{ u.a.}$$

VERSÕES VETORIAIS DO TEOREMA DE GREEN:

Def. 1 Dizemos que uma curva suave $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ é parametrizada pelo comprimento de arco se,

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\gamma'(t)\|\,dt = t_1 - t_0$$





PROPOSIÇÃO: Uma curva suave $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ é parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se, $\|\gamma'(t)\| = 1$ $\forall t \in [a,b]$.

DEMONSTR.: Suponha que $\|\gamma'(t)\| = 1$, $\forall t \in [a,b]$.

Então, $\forall\, t_0, t_1 \in [a,b]$, $t_0 < t_1$, temos:

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_{t_0}^{t_1} 1\,dt = t\Big|_{t_0}^{t_1} = t_1 - t_0$$

Logo, c.f. def. anterior, γ é parametrizada pelo comprimento de arco.

Reciprocamente, suponha que γ seja parametrizada pelo comprim. de arco. A mostrar: $\|\gamma'(t)\| = 1$, $\forall t \in [a,b]$.

Defina a função

$$\ell(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(t)\| dt$$

Então, $\forall t \in [t_0, b]$,

$$\ell(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(t)\| dt = t - t_0$$

$$\ell'(t) = 1. \qquad (*)$$

Por outro lado:

$$\ell'(t) = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(t)\| dt = \|\gamma'(t)\| \quad (**)$$

De $(*)$ e $(**)$ segue que $\|\gamma'(t)\| = 1$.

<u>Ex.:</u> $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$

é parametrizada pelo comprim. de arco, pois

$$\|\gamma'(t)\| = \|(-\operatorname{sen} t, \cos t)\| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t} = 1.$$

Isto posto, passemos para a 1ª extensão vetorial do T. de Green.

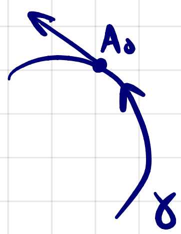
Seja $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ um campo vetorial definido em $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, e seja

$\gamma(s) = (x(s), y(s))$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco s.

Dessa forma, $\|\gamma'(s)\| = 1$; onde,

$$\gamma'(s) = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}\right)$$

Logo, $\vec{t}(s) = \gamma'(s) = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}\right)$ é um vetor tangente unitário à curva γ em um ponto A_0.

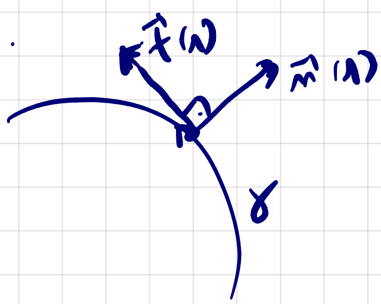


Define o vetor $\vec{n}(s)$ por

$\vec{n}(s) = \left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds}\right)$. Note que

$$\vec{t}(s) \cdot \vec{n}(s) = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}\right) \cdot \left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds}\right) = 0,$$

logo, $\vec{t}(s)$ é ortogonal a $\vec{n}(s)$. O vetor $\vec{n}(s)$ será unitário, por construção, e chama-se vetor normal em A_0.



Vamos determinar

$$\vec{F}\cdot\vec{n}(s) = \left(P(x,y),\, Q(x,y)\right)\cdot\left(\frac{dy}{ds},\, -\frac{dx}{ds}\right)$$

$$= P(x,y)\frac{dy}{ds} - Q(x,y)\frac{dx}{ds}$$

Então,

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot\vec{n}(s)\, ds = \oint_\gamma \left(P\frac{dy}{ds} - Q\frac{dx}{ds}\right) ds$$

$$= \oint_\gamma \overset{Q}{P}\,dy - \overset{P}{Q}\,dx \underset{\text{T. DE GREEN}}{=} \iint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \left(-\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\right) dx\,dy$$

$$= \iint_\Omega \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)}_{\operatorname{div}\vec{F}} \underbrace{dx\,dy}_{dA} = \iint_\Omega \operatorname{div}\vec{F}\, dA$$

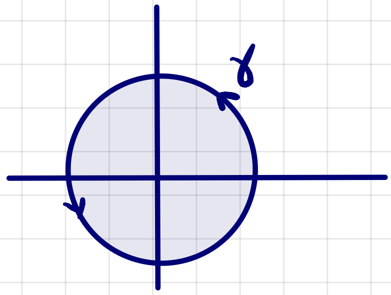
$$\boxed{\vec{F} = (P,\, Q) \overset{\text{def}}{\Longrightarrow} \operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}}$$

$$\Rightarrow \oint_\gamma \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds = \iint_\Omega \operatorname{div}\vec{F}\, dA$$

[TEOREMA DE GAUSS DA DIVERGÊNCIA].

EXERCÍCIO: Verifique o T. da divergência de gauss no plano para $\vec{F}(x,y) = 2y\,\vec{i} + 5x\,\vec{j}$ se γ for a circunferência $x^2+y^2=1$.

SOLUÇÃO:



$$\gamma : \begin{cases} x = \cos s \\ y = \operatorname{sen} s \end{cases}$$

↳ parametrizada pela compr. do arco. $\quad 0 \leq s \leq 2\pi$

$$\vec{n}(s) = \left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds}\right) = (\cos s, -\operatorname{sen} s)$$

Por um lado:

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \int_0^{2\pi} (2\operatorname{sen} s, 5\cos s)\cdot(\cos s, -\operatorname{sen} s)\,ds$$

$$\boxed{\vec{F} = (2y, 5x)}$$

$$= \int_0^{2\pi} (2\cdot\operatorname{sen} s\cos s - 5\operatorname{sen} s\cdot\cos s)\,ds$$

$$= -3\int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} s)^1 \cos s\,ds = -3\cdot\frac{\operatorname{sen}^2 s}{2}\Big|_0^{2\pi} = -\frac{3}{2}(\operatorname{sen}^2 2\pi - \operatorname{sen}^2 0)$$

$$\boxed{u = \operatorname{sen} s \Rightarrow du = \cos s\,ds}$$

$$= 0$$

Por outro lado:

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dA = \iint_{\Omega} \Big(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(2y)}_{0} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(5x)}_{0} \Big) \, dA$$

$\vec{F} = (2y, 5x)$

$$= \iint_{\Omega} 0 \, dA = 0$$

PARA ENTREGAR SEXTA:

Verifique o teorema da divergência de Gauss para $\vec{F}(x,y) = xy^2 \vec{i} + yx^2 \vec{j}$, sendo γ a circunferência $x^2 + y^2 = 9$.