23/08/23 – AULA 19

Obs.: Quando o caminho γ for um caminho fechado, i.e., $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, com $\gamma(a) = \gamma(b)$, costumamos escrever

$$\oint_\gamma \vec{F}\, d\vec{r}$$

para a integral de linha, onde o "círculo" desenhado no símbolo da integral indica que o caminho γ é fechado.

Também pode-se usar a notação

$$\circlearrowleft\!\!\oint_\gamma \vec{F}\, d\vec{r}\,,$$ onde a orientação

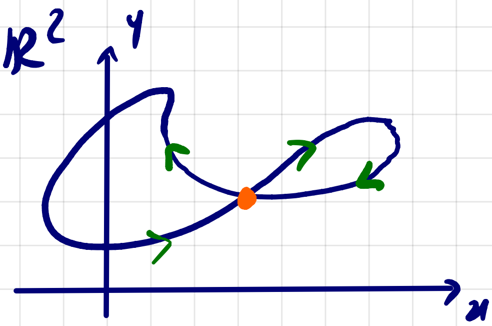
é no sentido anti-horário (POSITIVO)

Ainda no assunto sobre caminhos, dizemos que um caminho é simples quando não possui um NÓ, ou seja, quando não existe $t_0 \in [a,b]$, tal que γ se "entrelace" em t_0

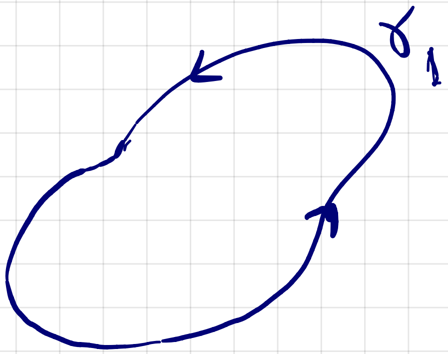
Ex.: $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$

CURVA FECHADA, ⟹

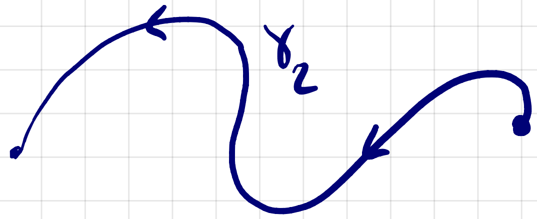
MAS NÃO SIMPLES.



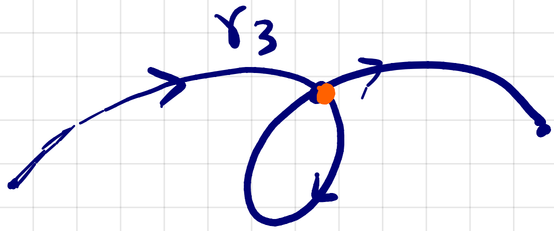
Caso contrário, temos curvas simples, fechadas ou abertas.



γ_1: CURVA SIMPLES, FECHADA



γ_2: CURVA SIMPLES, ABERTA



γ_3: CURVA NÃO FECHADA E NÃO SIMPLES.

POIS TEM UM NÓ.

COROLÁRIO: Se $\vec{F}$ for um campo conservativo definido e uma curva fechada γ, então,

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

DEMONSTR.: De fato, sendo $\vec{F}$ conservativo, então

$\exists\ \varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ tal que ; para $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$;

$$\int_\gamma \vec{F} d\vec{r} = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_a^b \nabla \varphi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

$$= \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) = 0, \text{ pois}$$

$\gamma(b) = \gamma(a)$. $\square$

TEOREMA DE GREEN:

O Teorema de GREEN transforma um problema de integral de linha no $\mathbb{R}^2$ em uma integral dupla.

TEOR. DE GREEN: Sejam P e Q funções de duas variáveis reais, com derivadas parciais contínuas em um disco aberto do $\mathbb{R}^2$. Se γ for uma curva fechada, seccionalmente suave, contida no disco, sendo $\Omega = \text{int}(\gamma)$, então

$$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

DEMONSTR.: Primeiramente, vamos considerar γ uma curva fechada, simples, suave, tal que retas verticais passando pelo seu gráfico cruzem γ em 2 pontos, ou todo uma parte vertical;

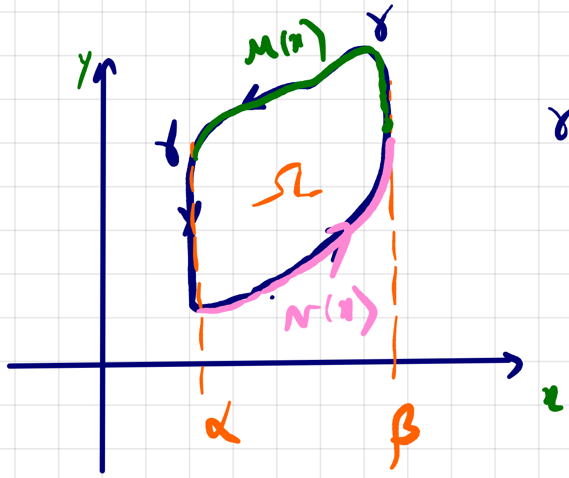
$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \; ; \quad t \in [a,b], \quad \gamma(a) = \gamma(b)$$

Seja $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ com P e Q nas hipóteses do Teorema.

Vamos calcular $\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy$.

Note que $$\boxed{\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = \oint_\gamma P\,dx + \oint_\gamma Q\,dy} \quad (I)$$

- $\oint_\gamma P\,dx = ?$



γ pode ser decomposta por duas funções : $y = \mu(x)$ e $y = \nu(x)$, c.f. esquema ao lado.

Assim:

$$\underbrace{\oint_\gamma P\,dx} = \int_\gamma P(x,y)\,.dx = \int_\beta^\alpha P(x,\mu(x))\,dx + \int_\alpha^\beta P(x,\nu(x))\,dx$$

DEVIDO À ORIENTAÇÃO DE γ.

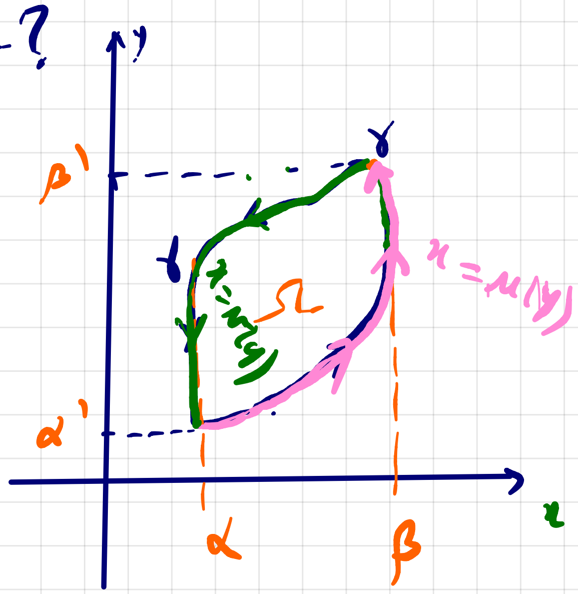
$$= -\int_\alpha^\beta P(x,\mu(x))\,dx + \int_\alpha^\beta P(x,\nu(x))\,dx$$

$$= \int_\alpha^\beta \left[-P(x,\mu(x)) + P(x,\nu(x))\right] dx$$

$$= \int_\alpha^\beta \left(-\int_{\nu(x)}^{\mu(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy\right) dx$$

$$= \underbrace{-\iint_\Omega \frac{\partial P}{\partial y}\,dA} \qquad (\mathrm{II})$$

• $\oint_\gamma Q\,dy = ?$



DECOMPOMOS γ EM DUAS FUNÇÕES DE y: $x = u(y)$ e $x = v(y)$ c.f. esquema ao lado.

Assim:

$$\oint_\gamma Q\,dy = \oint_\gamma Q(x,y)\,dy = \int_{\alpha'}^{\beta'} Q(u(y),y)\,dy + \int_{\beta'}^{\alpha'} Q(v(y),y)\,dy$$

$$= \int_{\alpha'}^{\beta'} Q(u(y),y) - \int_{\alpha'}^{\beta'} Q(v(y),y)\,dy$$

$$= \int_{\alpha'}^{\beta'} \left(\int_{v(y)}^{u(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,dx \right) dy = \iint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA \quad (\text{III})$$

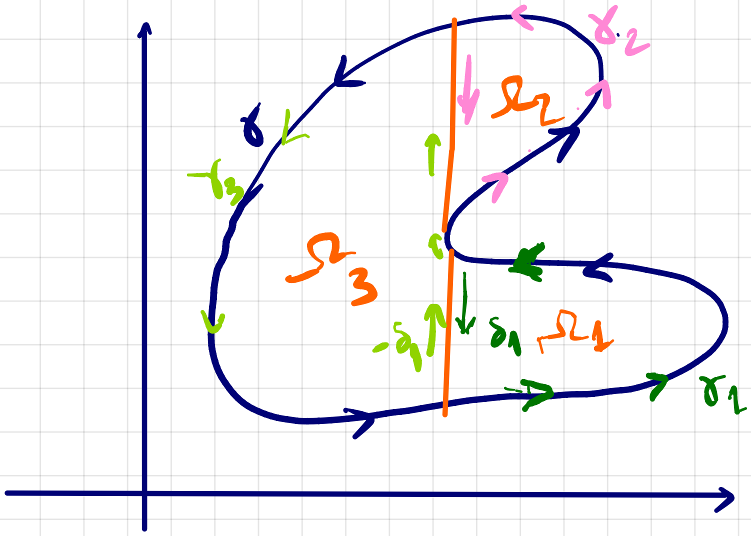
De (I), (II) e (III) segue que

$$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = \oint_\gamma P\,dx + \oint_\gamma Q\,dy$$

$$= -\iint_\Omega \frac{\partial P}{\partial y}\,dA + \iint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA$$

$$= \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

CASO GERAL: γ é uma fechada, seccionalmente contínua, podendo ter mais de 2 interceptos de γ com alguma reta vertical.



Basta decompor γ em umas menores que sejam simples, fechadas e que retas verticais se interceptam com γ em 2 pontos apenas.

Como $$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy \overset{\uparrow}{=} \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3};$$

NO EXEMPLO ESQUEMATIZADO ACIMA

e notando que nos caminhos verticais;

$$\int_{\delta_1} P\,dx + Q\,dy = -\int_{\delta_1} P\,dx + Q\,dy$$

logo, nestes, as integrais de linha se cancelam.

Então $$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_{\Omega_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA + \dots$$

$$+ \iint_{\Omega_3} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

$$= \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

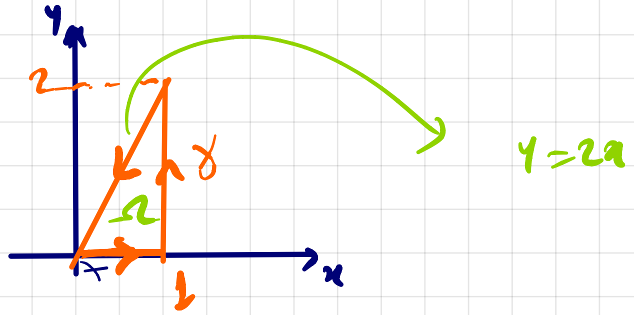
$\square$

EXEMPLOS:

01) Use o teorema de Green para calcular

$$\oint_\gamma x^2y\,dx + x\,dy,$$ ao longo do caminho γ

dado pelo esquema:



SOLUÇÃO:

$$\oint_\gamma x^2y\,dx + x\,dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA \;(=)$$

$$\begin{cases} P(x,y) = x^2y \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = x^2 \\ Q(x,y) = x \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1 \end{cases}$$

$$(=) \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=2x} (1 - x^2)\,dy\,dx = \int_{x=0}^{x=1} \left(y - x^2y\right)\Big|_{y=0}^{y=2x} dx$$

$$= \int_0^1 (2x - 2x^3)\,dx = \left(x^2 - \frac{x^4}{2}\right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

- PARA SEXTA:

- LISTA 05, QUESTÃO 07 · (b) – CÁTIA, GEILSON, GUSTAVO

(a) – WILIAN, CAROLINE