30/08/23 – AULA 19

Def.: Dizemos que $\vec{f} : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ é contínua em $a \in A$ se, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que $\forall x \in A$: $\quad |t-a| < \delta \Rightarrow d(f(t), f(a)) < \varepsilon$.

Se $a \in A \cap A'$, i.e., a for um ponto de acumulação do conj. A e pertencente ao mesmo, então:

$$f \text{ é cont. em } A \iff \exists \lim_{t \to a} \vec{f}(t) = \vec{f}(a).$$

DERIVADAS DE FUNÇÕES VETORIAIS A UMA VARIÁVEL REAL t:

Def.: Seja $\vec{f} : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, $\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t))$, $t_0 \in (a,b)$ um ponto de acumulação de (a,b).

Dizemos que $\vec{f}$ é derivável no ponto t_0, se existir o limite:

$$\vec{f}'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)}{t - t_0}.$$

Escrevendo $t - t_0 = h \in \mathbb{R}$, podemos reescrever a derivada $\vec{f}'(t_0)$ por:

$t = t_0 + h$. $\quad t \to t_0 \Rightarrow h \to 0$

$$\vec{f}'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{f}(t_0 + h) - \vec{f}(t_0)}{h}$$

Como temos

$$\vec{f}'(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t))$$

FUNÇÕES COORDENADAS.

Vamos montar o quociente $\dfrac{\vec{f}'(t_0+h) - \vec{f}'(t_0)}{h}$:

$$\vec{f}'(t_0+h) - \vec{f}(t_0) = (f_1(t_0+h), f_2(t_0+h), \dots, f_m(t_0+h)) -$$

$$- (f_1(t_0), f_2(t_0), \dots, f_m(t_0))$$

$$= (f_1(t_0+h) - f_1(t_0), f_2(t_0+h) - f_2(t_0), \dots, f_m(t_0+h) - f_m(t_0))$$

Logo:

$$\frac{\vec{f}'(t_0+h) - \vec{f}(t_0)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \left[(f_1(t_0+h) - f_1(t_0), \dots, f_m(t_0+h) - f_m(t_0))\right]$$

$$= \left(\frac{f_1(t_0+h) - f_1(t_0)}{h}, \dots, \frac{f_m(t_0+h) - f_m(t_0)}{h}\right)$$

Por fim, fazendo a passagem ao limite quando $h \to 0$, teremos:

$$\vec{f}'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{f}(t_0+h) - \vec{f}(t_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{f_1(t_0+h) - f_1(t_0)}{h}, \dots, \frac{f_m(t_0+h) - f_m(t_0)}{h} \right)$$

$$= \left(\underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f_1(t_0+h) - f_1(t_0)}{h}}_{f_1'(t_0)}, \dots, \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f_m(t_0+h) - f_m(t_0)}{h}}_{f_m'(t_0)} \right)$$

$$= \left(f_1'(t_0), f_2'(t_0), \dots, f_m'(t_0) \right)$$

Ou seja, a derivada de uma função vetorial resume-se ao cálculo da derivada de cada função coordenada, e cada uma delas é calculada c.f. Cálculo I.

Def.: A função derivada $\vec{f}'(t)$ é definida por $\vec{f}' : (a,b) \to \mathbb{R}^m$;

$$\vec{f}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h}, \quad \forall t \in (a,b).$$

se o limite existir.

Ex.: Dada $\vec{f}(t) = \left(\ln(t^2 - \operatorname{sen} t), \arctan t^2, 3t^3 - t^2 \right)$, calcule $\vec{f}'(t)$.

Solução: $\vec{f}'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t))$, onde:

- $f_1(t) = \ln(t^2 - \operatorname{sen} t) \Rightarrow f_1'(t) = \dfrac{2t - \cos t}{t^2 - \operatorname{sen} t}$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

- $f_2(t) = \arctan t^2 \Rightarrow f_2'(t) = \dfrac{2t}{1 + t^4}$

$$(\arctan u)' = \frac{u'}{1 + u^2}$$

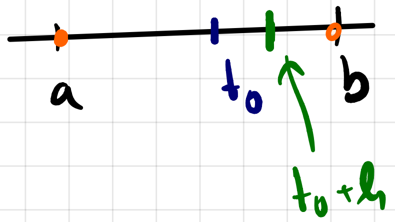
- $f_3(t) = 3t^3 - t^2 \rightarrow f_3'(t) = 9t^2 - 2t$

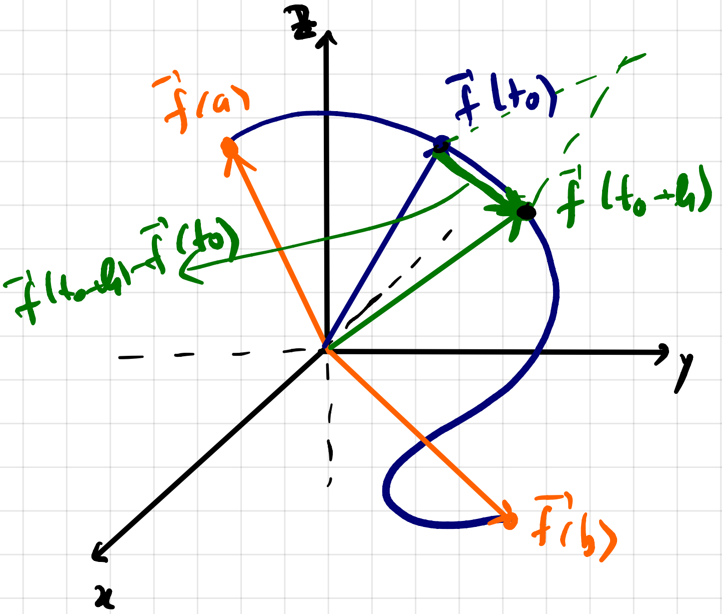
Portanto, obtemos:

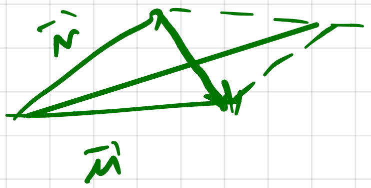
$$\vec{f}'(t) = \left(\frac{2t - \cos t}{t^2 - \operatorname{sen} t}, \frac{2t}{1+t^4}, 9t^2 - 2t \right)$$

Quando tivermos $\vec{f} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ ou $\vec{f} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, podemos dar um significado geométrico para a derivada $\vec{f}'(t_0)$, com $t_0 \in \operatorname{int}[a,b]$.

Seja $\vec{f}: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ derivável.

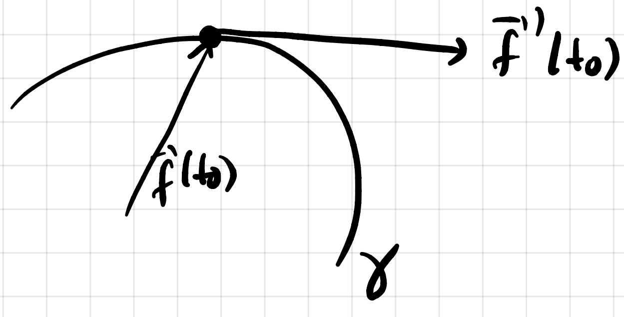






$\Rightarrow$ $\vec{f}(t_0+h) - \vec{f}(t_0)$ fornece um vetor secante ao gráfico de $\vec{f}$ nos pontos $\vec{f}(t_0)$ e $\vec{f}(t_0+h)$.

Logo, quando $h \to 0$, $\dfrac{\vec{f}(t_0+h) - \vec{f}(t_0)}{h}$ vai tender a um vetor tangente ao gráfico de $\vec{f}$ em t_0.



ALGUMAS PROPRIEDADES:

Sendo $\vec{f}, \vec{g}: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ deriváveis. Então, valem as seguintes propriedades aritméticas:

(a) $(\vec{f} + \vec{g})' = \vec{f}' + \vec{g}'$

(b) $(\vec{f} - \vec{g})' = \vec{f}' - \vec{g}'$.

(c) $(\vec f \cdot \vec g)' = \vec f \cdot \vec g' + \vec g' \cdot \vec f$ [obs: o produto aqui é o produto escalar]

(d) $(\vec f \times \vec g)' = \vec f \times \vec g' + \vec f' \times \vec g$.

Provaremos o item (d) e os demais ficam como exercício.

Sejam $\vec f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ e

$$\vec g(t) = (g_1(t), g_2(t), g_3(t)).$$

Efetuando o produto vetorial entre $\vec f$ e $\vec g$, obtemos:

$$\vec f(t) \times \vec g(t) = \left|\begin{array}{ccc|cc} \vec i & \vec j & \vec k & \vec i & \vec j \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_1 & g_2 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{cccccc} - & - & - & + & + & + \end{array}$$

$$= (f_2 g_3 - f_3 g_2)\cdot\vec i + (f_3 g_1 - f_1 \cdot g_3)\vec j + (f_1 \cdot g_2 - f_2 g_1)\vec k$$

Assim, teremos:

$$(\vec f \times \vec g)' = \Big(f_2 \cdot g_3' + f_2' g_3 - f_3 g_2' - f_3' g_2,\ f_3 \cdot g_1' + f_3' g_1 - f_1 g_3' - f_1' g_3,$$

$$f_1 g_2' + f_1' g_2 - f_2 g_1' - f_2' g_1\Big) =$$

(vamos separar numa soma de 2 vetores, onde num guardaremos informações sobre $\vec f$ e $\vec g'$ e o outro $\vec f'$ e g)

$$= \left(f_2 g_3' - f_3 g_2',\ f_3 g_1' - f_1 g_3',\ f_1 g_2' - f_2 g_1'\right) +$$

$$+ \left(f_2' g_3 - f_3' g_2,\ f_3' g_1 - f_1' g_3,\ f_1' g_2 - f_2' g_1\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1' & g_2' & g_3' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1' & f_2' & f_3' \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix} = \underline{\vec{f} \times \vec{g}\,' + \vec{f}\,' \times \vec{g}}$$

$\square$

DERIVADAS PARCIAIS:

Def: Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função de várias variáveis reais, e seja $a \in \operatorname{int} \Omega$.

$$f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$
$$(x_1, x_2, \dots, x_m) \longmapsto f(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}.$$

Definimos a derivada parcial de f em relação à variável x_i, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, por:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + h, \dots, x_m) - f(x_1, \dots, x_m)}{h},$$

se este limite existir.

No caso de $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, escrevemos:

$$z = f(x, y).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \quad e$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}.$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ é a derivada parcial de f em relação à variável x e $\frac{\partial f}{\partial y}$ é a derivada parcial de f em relação à variável y.

<u>obs.</u>: O SÍMBOLO DE DERIVAÇÃO PARCIAL ∂ LÊ-SE "DE ROND".

<u>obs</u>: Na derivação parcial, dada $f(x_1, \dots, x_n)$, quando calculamos $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, então todas as demais variáveis são consideradas constantes. Disso, segue que as regras de derivação do CÁLCULO são usadas na derivação parcial.

<u>EX. 1</u> Seja $f(x,y) = x^2 y - 3xy^2$.

Vamos calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$ de duas formas:

(a) pela definição;

(b) pelas regras de derivação.

(a) : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 y - 3.(x+\Delta x) y^2 - [x^2 y - 3xy^2]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2)y - 3xy^2 - 3\Delta x y^2 - x^2 y + 3xy^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x^2 y} + 2xy\Delta x + \Delta x^2 y \cancel{- 3xy^2} - 3\Delta x y^2 \cancel{- x^2 y} \cancel{+ 3xy^2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}\,[2xy + \Delta x . y - 3y^2]}{\cancel{\Delta x}} = 2xy - 3y^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - 3y^2}$$

(b) pelas regras de derivação :

$$f(x,y) = x^2 y - 3xy^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - 3y^2$$

y é const.

Outro exemplo: Dada $f(x,y,z) = e^{xy^2z} + \ln(x^2+y^2)$

Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial z}$.

obs.:

$$\boxed{\begin{array}{l} (e^{u})' = e^{u} \cdot u' \\ (\ln u)' = \frac{u'}{u} \end{array}}$$

Solução:

- $$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{xy^2z} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(xy^2z) + \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

$$= e^{xy^2z} \cdot y^2z + \frac{2x}{x^2+y^2} = y^2 z e^{xy^2z} + \frac{2x}{x^2+y^2}$$

- $$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{xy^2z} \cdot (2xyz) + \frac{2y}{x^2+y^2}$$

- $$\frac{\partial f}{\partial z} = e^{xy^2z} \cdot (xy^2) + \cancel{\frac{0}{x^2+y^2}} = xy^2 \cdot e^{xy^2z}$$

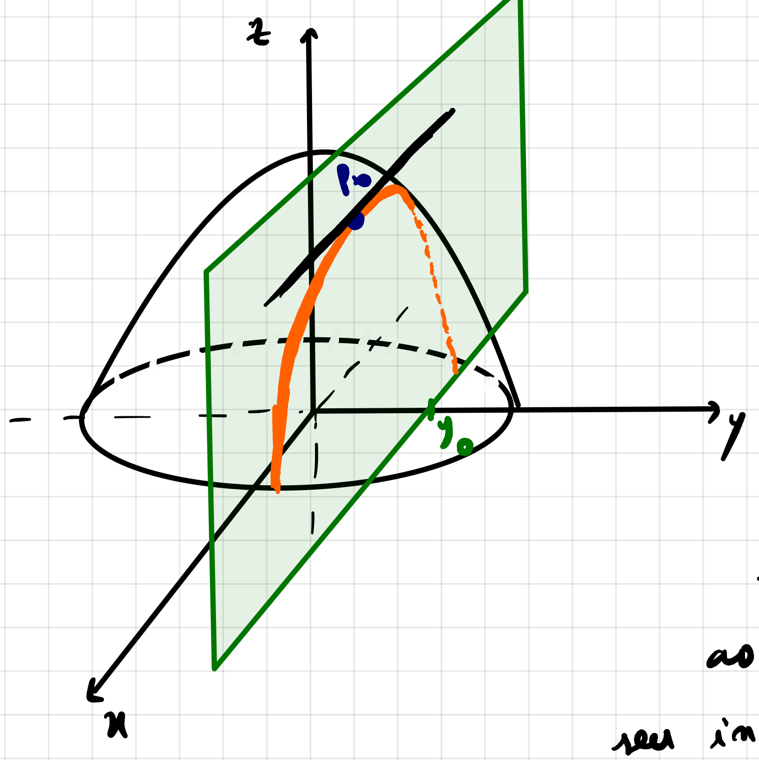
0

SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DA DERIVADA PARCIAL:

Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Seja $P_0(x_0, y_0) \in \text{int}(\Omega)$.

Tomando $y = \text{constante} = y_0$, vamos apresentar o significado geométrico para $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.



$y = \text{CONST.}$

o plano $y = y_0$ CONSTANTE é um plano paralelo ao plano xz, o seu seu intercepto com o gráfico de f resulta em uma curva γ. $P_0(x_0, y_0) \in \gamma$.

Assim $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ fornece o coeficiente angular da reta que tangencia γ em P_0.

Analogamente para $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, que fornecerá a inclinação da outra reta tangente em P_0, passando por uma outra curva γ_1, que será obtida com interseção do gráfico de f com o plano $x = x_0 = \text{CONST.}$