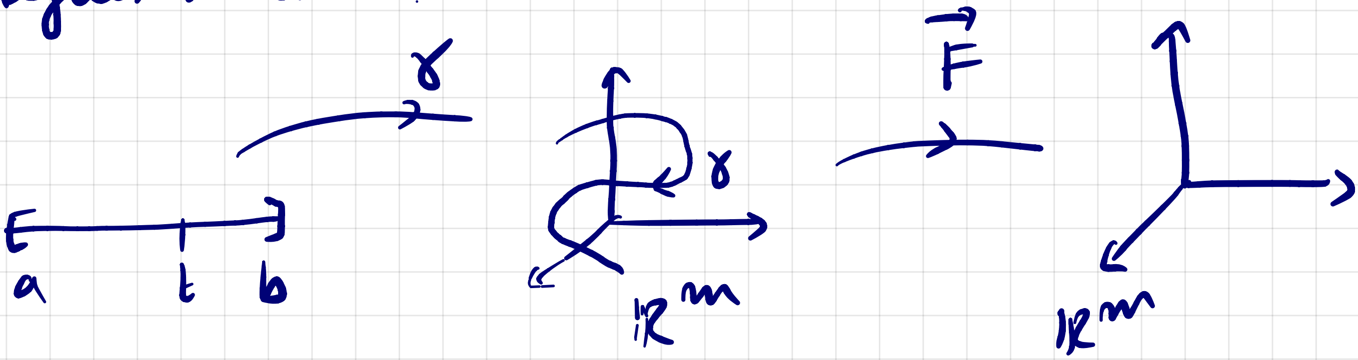
18/08/23 (AULA 18).

Na aula passada iniciamos o estudo de integrais de linha:



$$\int_\gamma \vec F\, d\vec r = \int_a^b \vec F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

Sendo $\vec F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$, então temos ainda que

$$\int_\gamma \vec F\, d\vec r = \int_a^b P\, dx + Q\, dy + R\, dz$$

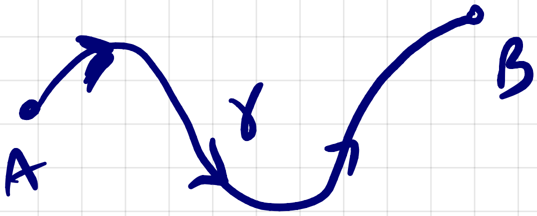
[aqui: $d\vec r = (dx, dy, dz)$]

ORIENTAÇÃO DA CURVA γ.

Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ é uma curva, com

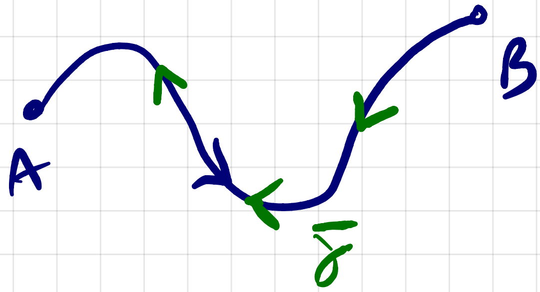
$$\gamma(a) = A \quad \text{e} \quad \gamma(b) = B.$$

dizemos que a <u>orientação</u> de γ é do ponto A ao ponto B, $A, B \in \mathbb{R}^n$



Uma curva $\bar{\gamma}$ é dita de orientação contrária à da curva γ se o caminho for o mesmo (de γ), mas de B para A.

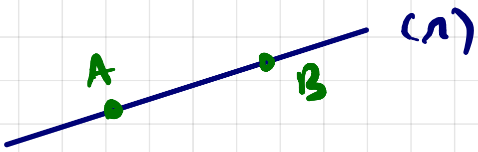
Neste caso, $\bar{\gamma}(a) = B$ e $\bar{\gamma}(b) = A$.



Obs.: É sabido, desde a Geom. analítica que, por exemplo, uma reta no $\mathbb{R}^3$ pode possuir infinitos equacionamentos na forma paramétrica pois podemos considerar pontos diferentes e/ou vetores diretores diferentes para montar uma eq. paramétrica para a mesma. No entanto, todas elas representarão o mesmo lugar geométrico, que é a reta do $\mathbb{R}^3$ a ser determinada.

$A(x_A, y_A, z_A)$

$B(x_B, y_B, z_B)$



$\vec{u} = \vec{AB} = B - A$
$= (a, b, c)$

$$(r): \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \quad \text{ou} \quad (r): \begin{cases} x = x_B + at \\ y = y_B + bt \\ z = z_B + ct \end{cases}, \text{ por ex.}$$

Tendo isto em mente, então, considerando um caminho $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, e $\vec{F}$ um campo vetorial, podemos, a priori, fazer qualquer parametrização para o lugar geométrico γ (caminho). A integral de linha $\int_\gamma \vec{F} \, d\vec{r}$ não sofrerá alteração do seu valor (resultado) se tomarmos outra parametrização, c.f. o resultado abaixo:

<u>PROPOSIÇÃO:</u> Uma integral de linha independe de parametrização, desde que as parametrizações feitas mantenham a mesma orientação.

<u>DEMONSTR.:</u> Faremos a prova no caso $\mathbb{R}^2$ (mas vale em $\mathbb{R}^m$)

Sejam $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ uma parametrização dada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$

e $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ campo vetorial dado por

$$\vec{F}(x,y) = \left(P(x,y) \, ; \, Q(x,y)\right)$$

Seja $\varphi : [c,d] \to [a,b]$, com $\varphi'(x) > 0$, $\forall x$ e

$$\varphi(c) = a$$
$$\varphi(d) = b,$$

e considere

$\bar{\gamma} : [c,d] \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\bar{\gamma}(u) = \gamma(\varphi(u))$$

[ISTO FAZ COM QUE $\bar{\gamma}$ SEJA OUTRA PARAMETRIZAÇÃO PARA Γ, COM MESMA ORIENTAÇÃO]

$$\bar{\gamma}(c) = \gamma(\varphi(c)) = \gamma(a)$$

$$\bar{\gamma}(d) = \gamma(\varphi(d)) = \gamma(b)$$

Disso, teremos:

$$\int_{\bar{\gamma}} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_c^d \vec{F}(\bar{\gamma}(u)) . \bar{\gamma}'(u)\, du$$

$$= \int_c^d \vec{F}(\gamma(\varphi(u))) \cdot \underbrace{(\gamma \circ \varphi)'(u)}_{\gamma'(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)} . du \;\; = $$

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

$$\gamma(\varphi(u)) = (x(\varphi(u)), y(\varphi(u))) = ((x \circ \varphi)(u), (y \circ \varphi)(u))$$

$$= \int_c^d \vec{F}(x(\varphi(u)), y(\varphi(u))) \cdot \gamma'(\varphi(u)) . \varphi'(u) . du =$$

$$= \int_c^d \Big(P(x(\varphi(u)), y(\varphi(u))), Q(x(\varphi(u)), y(\varphi(u)))\Big) \gamma'(\varphi(u)) . \varphi'(u)\, du =$$

$$= \int_c^d \Big(P(x(\varphi(u)), y(\varphi(u))), Q(x(\varphi(u)), y(\varphi(u)))\Big) . \Big((x \circ \varphi)'(u), (y \circ \varphi)'(u)\Big) \varphi'(u)\, du =$$

PRODUTO ESCALAR

$$= \int_c^d \Big[P\big(x(\varphi(u)), y(\varphi(u))\big) \cdot \underbrace{(x\circ\varphi)'(u)}_{= [x(\varphi(u))]'} + Q\big(x(\varphi(u)), y(\varphi(u))\big) \cdot \underbrace{(y\circ\varphi)'(u)}_{= [y(\varphi(u))]'} \Big] \varphi'(u)\,du$$

$$= \int_c^d \Big[P\big(x(\varphi(u)), y(\varphi(u))\big)\, x'(\varphi(u)) + Q\big(x(\varphi(u)), y(\varphi(u))\big)\, y'(\varphi(u)) \Big] \varphi'(u)\,du$$

Escreva $\varphi(u) = t$. Assim;

$$dt = \varphi'(u)\,du.$$

Além disso, por construção de φ: $\varphi(c) = a$ e $\varphi(d) = b$.

Disso, teremos:

$$\underbrace{\int_{\bar{\gamma}} \vec{F}\, d\vec{r}}\ =$$

$$= \int_c^d \Big[P\big(x(\underbrace{\varphi(u)}_{t}), y(\underbrace{\varphi(u)}_{t})\big)\, x'(\underbrace{\varphi(u)}_{t}) + Q\big(x(\underbrace{\varphi(u)}_{t}), y(\underbrace{\varphi(u)}_{t})\big)\, y'(\underbrace{\varphi(u)}_{t}) \Big] \underbrace{\varphi'(u)\,du}_{dt}$$

$$= \int_a^b \big[P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t) \big]\, dt$$

$$= \int_a^b P(x(t), y(t)) \cdot \underbrace{x'(t)\,dt}_{=dx} + Q(x(t), y(t)) \cdot \underbrace{y'(t)\,dt}_{dy}$$

$$= \int_a^b P(x(t), y(t))\, dx + Q(x(t), y(t))\, dy = \underbrace{\int_\gamma \vec{F}\, dr}. \quad \square$$

No que segue, vamos mostrar um resultado que é equivalente ao teorema fundamental do cálculo, do saudoso Cálculo I:

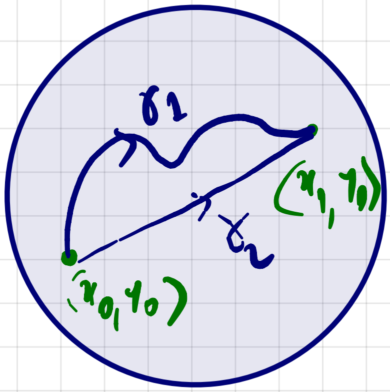
<u>TEOREMA</u>: Seja γ uma curva seccionalmente suave;(*) definida em um disco $D \subset \mathbb{R}^2$ do ponto (x_0, y_0) ao ponto (x_1, y_1).

Se $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ for um campo vetorial conservativo contínuo, sendo $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função potencial, então,

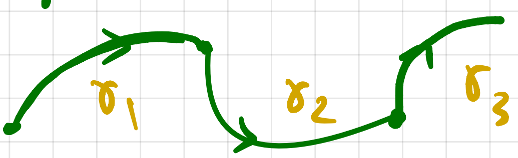
$$\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{r}$$

independe de γ, e

$$\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{r} = \varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_0, y_0).$$



(*) Ou seja a curva γ é decomposta em subintervalos (pedaços da curva) que são deriváveis.



$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$

Obs.: Este teorema se estende em $\mathbb{R}^n$, mas faremos apenas a prova no caso $\mathbb{R}^2$.

DEMONSTRAÇÃO: Para facilitar a prova faremos no caso de γ suave (lisa em todo o domínio).

Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$,

onde $x(t) = f(t)$
$y(t) = g(t)$.

tal que $(x_0, y_0) = (f(a), g(a))$
$(x_1, y_1) = (f(b), g(b))$

Como $\vec{F}$ é um campo conservativo, então $\exists\, \varphi$ função potencial tal que

$$\nabla \varphi = \vec{F}.$$

Assim:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

$$= \int_a^b \nabla \varphi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt =$$

$$= \int_a^b \nabla \varphi(f(t), g(t)) \cdot (f'(t), g'(t))\, dt =$$

$$= \int_a^b \big(P(f(t), g(t)), Q(f(t), g(t))\big) \cdot \big(f'(t)\, dt, \; g'(t)\, dt\big)$$

$\nabla \varphi = \vec{F} = (P, Q)$

PRODUTO INTERNO

$$= \int_a^b P(f(t), g(t)) \cdot f'(t)\, dt + Q(f(t), g(t)) \cdot g'(t)\, dt$$

Como $P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = d(\varphi(x, y))$;

então

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b P(f(t), g(t)) \cdot f'(t)\, dt + Q(f(t), g(t))\, g'(t)\, dt$$

$$= \int_a^b d\varphi(f(t), g(t)) = \varphi(f(t), g(t)) \Big|_a^b =$$

$$= \varphi(f(b), g(b)) - \varphi(f(a), g(a)) =$$

$$= \varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_0, y_0).$$

$\square$

EXEMPLOS:

01) Se $\vec{F}(x,y) = \frac{1}{y}\vec{i} - \frac{x}{y^2}\vec{j}$ e γ for qualquer curva seccionalmente suave do ponto $A(5,-1)$ ao ponto $B(9,-3)$, mostre que o valor da integral de linha

$$\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{r}$$

independe do caminho γ. Depois, calcule-a.

SOLUÇÃO: Para mostrar que independe do caminho precisamos mostrar que é um campo gradiente. Isto foi feito num exemplo na aula passada.

Também pode-se usar de um teorema:

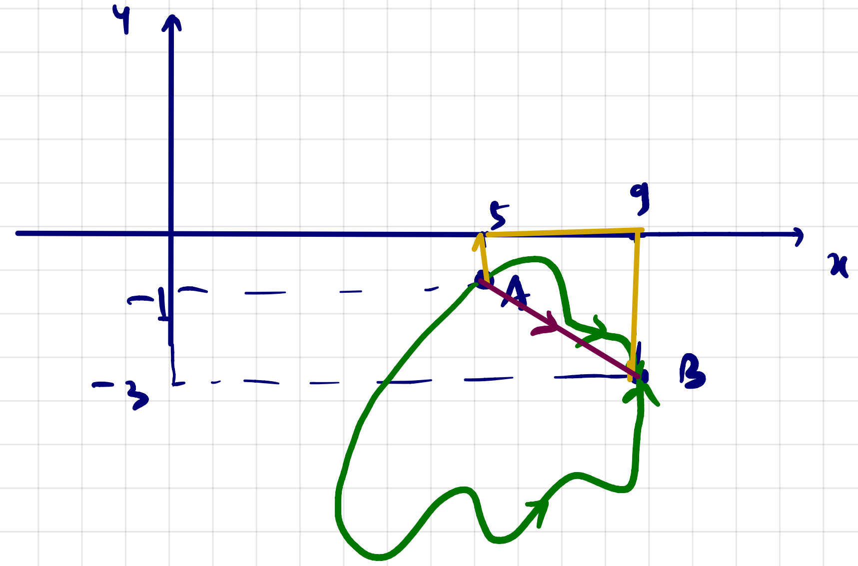
$$\vec{F} = P.\vec{i} + Q\vec{j}$$

$$\Rightarrow P(x,y) = \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}$$

$$Q(x,y) = -\frac{x}{y^2} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$ Logo, $\vec{F}$ é um campo conservativo.

Cálculo de $\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r}$:



Como esta integral independe do caminho, seja γ uma parametrização da reta ligando os pontos A e B: eq da reta:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} x & y & 1 & x & y \\ 5 & -1 & 1 & 5 & -1 \\ 9 & -3 & 1 & 9 & -3 \end{array}\right| = 0$$

$$-x + 9y - 15 + 9 + 3x - 5y = 0$$

$$2x + 4y = 6 \quad \div 2$$

$$x = 3 - 2y$$

Considere a parametrização:

$$\gamma : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = t \end{cases} \quad ; \quad A(5, -1) \hookrightarrow t \quad B(9, -3)$$

$\longrightarrow$ t de -1 a -3 (pois é de A até B)

$$\Rightarrow \int_\gamma \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{-1}^{-3} P(x(t), y(t))\,dx + Q(x(t), y(t))\,dy$$

$$= \int_{-1}^{-3} \frac{1}{y}\,dx - \frac{x}{y^2}\,dy =$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2t \Rightarrow dx = -2dt \\ y = t \Rightarrow dy = dt \end{cases}$$

$$= \int_{-1}^{-3} \frac{1}{t} \cdot (-2dt) - \frac{3-2t}{t^2} \cdot dt =$$

$$= -2 \cancel{\int_{-1}^{-3} \frac{dt}{t}} - 3\int_{-1}^{-3} t^{-2}\, dt + 2\cancel{\int_{-1}^{-3} \frac{dt}{t}} = -3 \left. \frac{t^{-1}}{-1} \right|_{-1}^{-3} =$$

$$+ \left. \frac{3}{t} \right|_{-1}^{-3} = \frac{3}{-3} - \left(\frac{3}{-1} \right) = -1 + 3 = \underline{\underline{2}}$$