11/08/23 – AULA 16

CAMPOS VETORIAIS

Def: Um campo vetorial é uma função

$$\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \longrightarrow (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

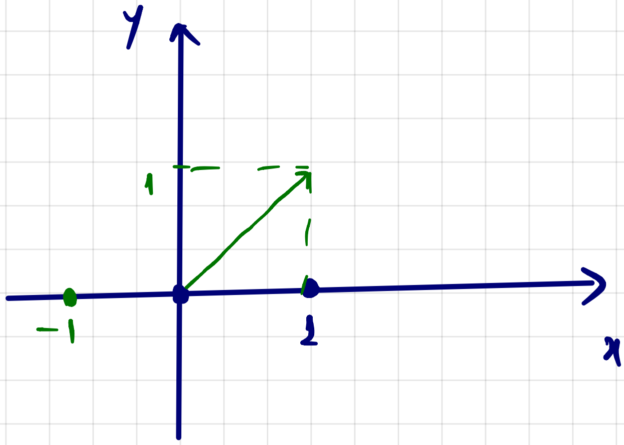
Dessa forma, por exemplo, operadores lineares estudados na álgebra linear podem ser pensados como campos vetoriais.

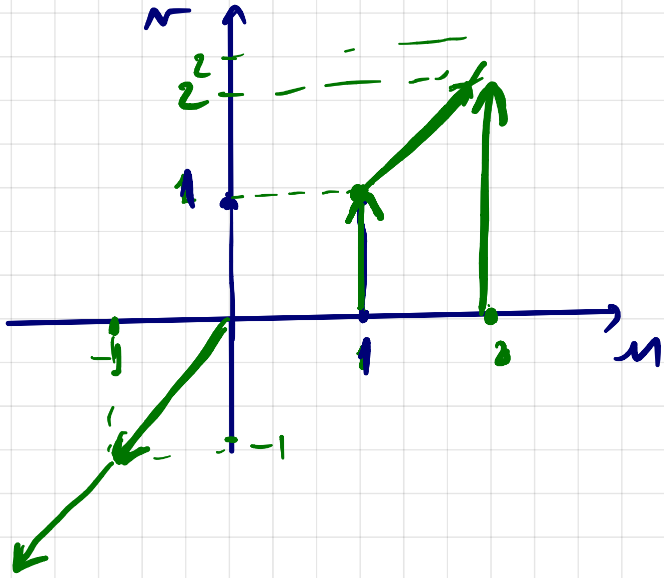
Naturalmente, como o nome diz, vamos tomar $(x_1, \dots, x_n)$ como um vetor do $\mathbb{R}^n$ e não como simplesmente um ponto no $\mathbb{R}^n$, muito embora hoje correspondência biunívoca entre ponto e vetor.

EXEMPLOS: $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x,y) = y\,\vec{i} + x\,\vec{j}$

(x,y)	$\vec{F}(x,y) = (y,x)$
$(1,0)$	$(0,1)$
$(1,1)$	$(1,1)$
$(-1,0)$	$(0,-1)$
$(-1,-1)$	$(-1,-1)$
$(2,0)$	$(0,2)$

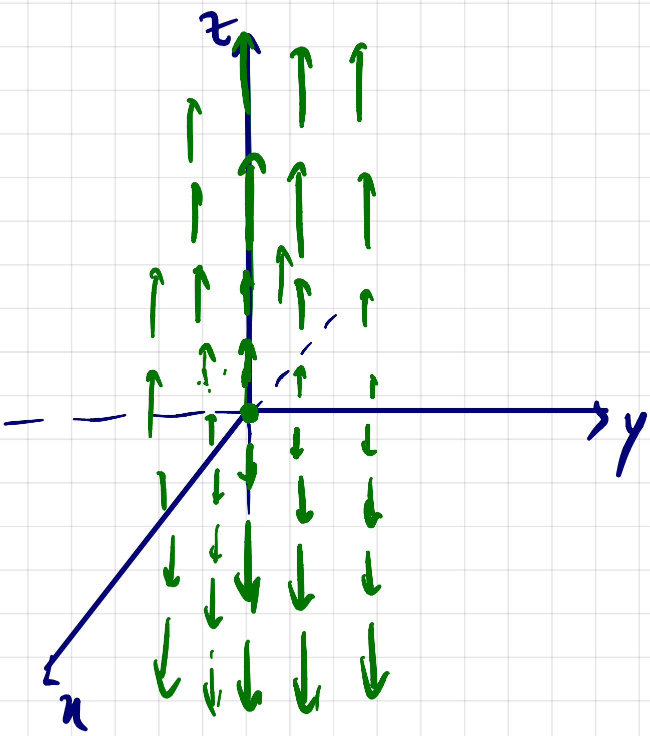
$= (u, v)$





02) $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\vec{F}(x,y,z) = z\vec{k} = (0,0,z)$



<u>**Def**</u>: Dada uma função escalar $\varphi: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função escalar. Dizemos que uma função $\vec{F}: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um <u>CAMPO GRADIENTE</u> de φ se $\nabla \varphi = \vec{F}$. Neste caso, φ chama-se <u>FUNÇÃO POTENCIAL</u> de $\vec{F}$.

Obs.: O campo gradiente chama-se também de CAMPO CONSERVATIVO

Obs: Lembrando do CÁLCULO II; dada $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$; então

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right)$$

EXEMPLO Dada $\vec{F}(x,y) = (y^2+2x+4)\vec{i} + (2xy+4y-5)\vec{j}$; qual é a função potencial φ, se existir, tal que $\nabla \varphi = \vec{F}$?

Solução: Queremos que $\nabla \varphi = \vec{F}$, i.e.,

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \left(y^2+2x+4,\ 2xy+4y-5 \right)$$

Disso:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = y^2+2x+4 \quad (*) \qquad e \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2xy+4y-5 \quad (**)$$

$$\varphi(x,y) = \int \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx = \int (y^2+2x+4)\, dx$$

$$= y^2x + x^2 + 4x + g(y)$$

Derivando em y, vamos encontrar:

$$\varphi(x,y) = y^2x + x^2 + 4x + g(y)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2xy + g'(y) \quad .$$ Comparando com (++), vem:

$$\cancel{2xy} + g'(y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \cancel{2xy} + 4y - 5$$

$$g'(y) = 4y - 5$$

$$\Rightarrow g(y) = \int (4y-5)\,dy$$

$$= 2y^2 - 5y + c$$

Portanto,

$$\varphi(x,y) = y^2x + x^2 + 4x + g(y)$$

$$\Rightarrow \varphi(x,y) = y^2x + x^2 + 4x + 2y^2 - 5y + c$$

é uma função potencial para $\vec{F}$.

De fato, $\nabla \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)$

$$= \left(y^2 + 2x + 4,\ 2xy + 4y - 5\right) = \vec{F}(x,y)$$

TEOREMA: Se M e N são duas funções de duas variáveis reais x e y definidas numa $B_R(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial M}{\partial y}$ e $\frac{\partial N}{\partial x}$ forem contínuas nesta bola, então $M(x,y)\vec{i} + N(x,y)\vec{j}$ será um gradiente se, e somente se, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Podemos aplicar este teorema ao exemplo anterior.

De fato; $\vec{F}(x,y) = (y^2+2x+4)\vec{i} + (2xy+4y-5)\vec{j}$.

$$= M(x,y)\vec{i} + N(x,y)\vec{j}.$$

$$M = y^2+2x+4 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2y$$

$$N = 2xy+4y-5 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 2y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Logo, $\vec{F}$ é de fato um campo gradiente

EXEMPLO: Se $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{1}{y}, \frac{-x}{y^2}\right)$, prove que $\vec{F}$ é conservativo e ache uma função potencial φ para $\vec{F}$.

Solução: $\vec{F}(x,y) = M(x,y)\,\vec{i} + N(x,y)\,\vec{j}$

Disso:

$$M(x,y) = \frac{1}{y} = y^{-1}$$

$$N(x,y) = \frac{-x}{y^2} = -x \cdot y^{-2}$$

Assim:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -y^{-2} = -\frac{1}{y^2}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -y^{-2} = -\frac{1}{y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Logo, $\vec{F}$ é conservativo, i.e. $\exists\, \varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla \varphi = \vec{F}$; onde φ é a função potencial

Cálculo de φ:

$$\nabla \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \left(\frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2} \right) = \vec{F}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{y} \quad ; \quad \boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}}$$

$$\Rightarrow \varphi(x,y) = \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot dx = \int \frac{1}{y} \cdot dx = \frac{x}{y} + \underbrace{g(y)}_{\text{CONSTANTE PARA } x.}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(x,y) = \frac{x}{y} + g(y)}$$

Derivando em relação a y:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial\left(x \cdot y^{-1} + g(y)\right)}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + g'(y)$$

Logo:

$$\cancel{-\frac{x}{y^2}} + g'(y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \cancel{-\frac{x}{y^2}}$$

$$\Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = c.$$

Portanto:

$$\boxed{\varphi(x,y) = \frac{x}{y} + c}$$

Def: Seja $\vec{F}: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por

$$\vec{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\,\vec{i} + N(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}.$$

Definimos o rotacional de $\vec{F}$, e escrevemos $\operatorname{rot} \vec{F}: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, por:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\vec{k},$$

se as derivadas parciais existirem.

Simbolicamente, i.e., de forma mnemônica, costuma-se representar o rotacional de $\vec{F}$ por:

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \left|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & R \end{matrix}\right| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ M & N \end{matrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Ex.: $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$;

$$F(x,y,z) = \left(x^2 y + yz,\ e^{xz},\ z \cdot \operatorname{sen} x\right)$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = ?$$

Solução:

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \left|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y+yz & e^{xz} & z\operatorname{sen} x \end{matrix}\right| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ x^2y+yz & e^{xz} \end{matrix}$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \left(0 - x e^{xz}\right)\vec{i} + \left(y - z\cos x\right)\vec{j} + \left(z e^{xz} - x^2 - z\right)\vec{k}$$

Def: Seja $\vec{F}: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ campo vetorial,

$$\vec{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\,\vec{i} + N(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}.$$

Definimos o divergente de $\vec{F}$ por:

$$\operatorname{div} \vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Simbolicamente, podemos escrever para o rotacional e o divergente as notações simbólicas:

- $$\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & R \end{vmatrix}$$

- $$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (M, N, R)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x} M + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

EXERCÍCIOS: 01) Mostre que $\operatorname{rot}(\nabla F) = \vec{0}$.

02) Dado $\vec{F}(x,y,z) = (xy^2, 2x\operatorname{sen} z, x^2z^3)$ calcule $\operatorname{div}(\vec{F})$.