11/08/23 – AULA 15

FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS REAIS:

Def.: Uma função $f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, x \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$ associa a um ponto $f(x) \in \mathbb{R}^n$, chama-se função de m variáveis reais.

$$f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \longmapsto f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)),$$

onde cada $f_i(x) = f_i(x_1, x_2, \dots, x_m)$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, é uma FUNÇÃO COORDENADA.

EXEMPLOS: 01) Todas transformações lineares $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ são funções de várias variáveis reais. Por exemplo:

$$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,$$
$$T(x, y, z) = (2x - y + z,\ x - 3y)$$

é uma função de 3 variáveis reais.

02) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x, y, z) = \left(3x^2 \cdot \operatorname{sen}(y+z),\ e^{xy},\ y\sqrt{x^2+1}\right)$$

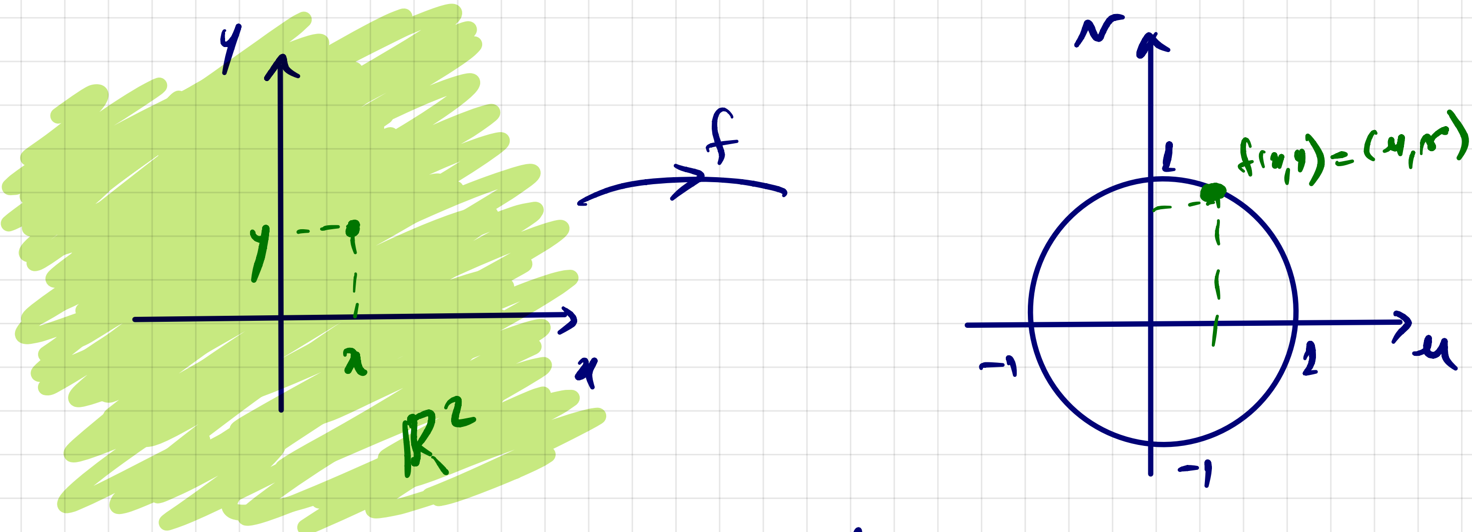
é tal que as funções coordenadas são

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = 3x^2 \operatorname{sen}(y+z) \\ f_2(x,y,z) = e^{xy} \\ f_3(x,y,z) = y\sqrt{x^2+1} \end{cases} \quad f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

03) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (\cos x, \operatorname{sen} x)$

Neste caso, $f_1(x) = \cos x := u$

• $f_2(x) = \operatorname{sen} x := v$



Neste caso, note que

$$\left.\begin{array}{l} u = \cos x \\ v = \operatorname{sen} x \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \\ u^2 + v^2 = 1 \end{array}$$

Ou seja, esta f manda TODOS os pontos do plano xy para a circunferência $u^2+v^2=1$ no plano uv.

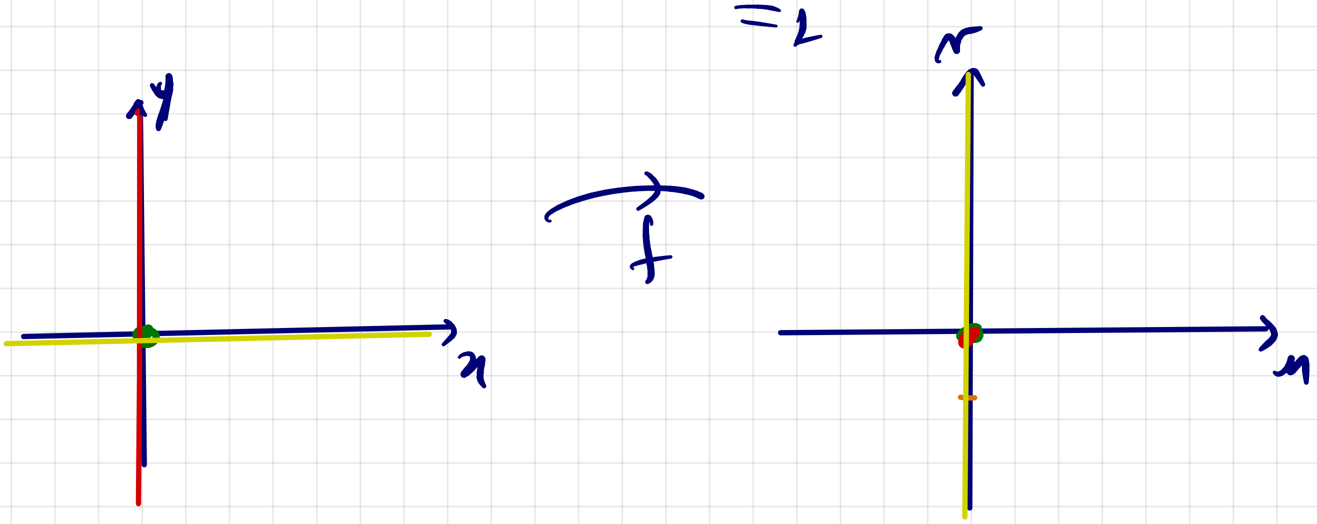
04) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = (\underbrace{x \cdot \operatorname{sen} y}_{u}, \underbrace{x \cos y}_{v})$$

Neste caso;

$$u^2+v^2 = x^2 \operatorname{sen}^2 y + x^2 \cdot \cos^2 y$$

$$= x^2 (\underbrace{\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y}_{=1}) = x^2$$



$(0,0)$

$u^2+v^2=x^2$ (CIRCUNFERÊNCIAS CENTRADAS NA ORIGEM E RAIO $|x|$.

(x,y)	$f(x,y) = (x \operatorname{sen} y, x \cos y)$
$(0,0)$	$(0,0)$
$(0,1)$	$(0,0)$ ou $u^2+v^2=0$
$\forall y; (0,y)$	$(0,0)$ ou $u^2+v^2=0$
$\forall x; (x,0)$	$(x \cdot \operatorname{sen} 0, x \cos 0) = (0, x)$

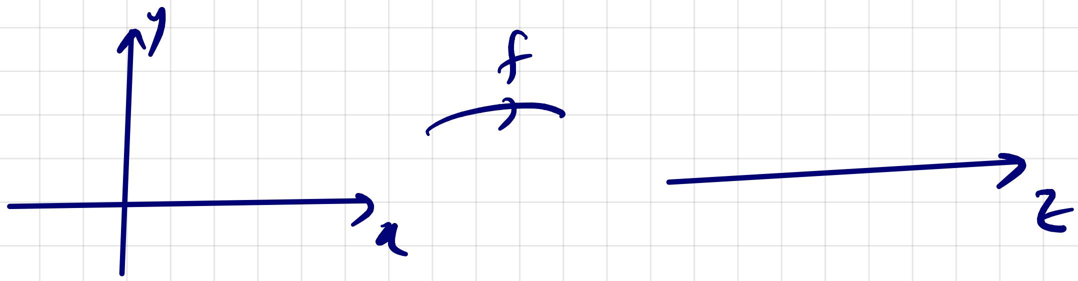
[OU SEJA, A IMAGEM DE TODO O EIXO y SERÁ, NO PLANO uv, A ORIGEM]

↳ OU SEJA, O EIXO HORIZONTAL, MEDIANTE f, TRANSFORMA-SE NO EIXO VERTICAL.

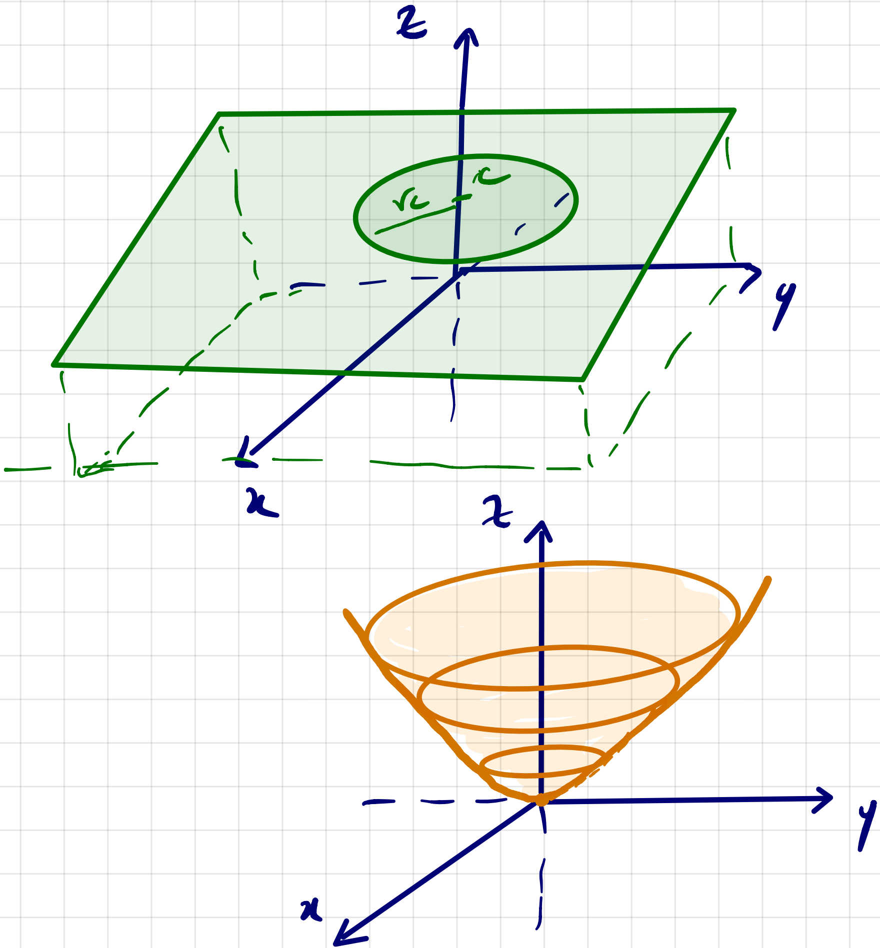
Para funções de várias variáveis, como no caso acima, salvo alguns pontos especiais, não tem muito o que fazer no que diz respeito a esboço da imagem, salvo em casos muito especiais.

05) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$



$\Downarrow$



"ALTURA"

$z = f(x,y)$

$z = x^2 + y^2$

$\downarrow$

PARABOLÓIDE

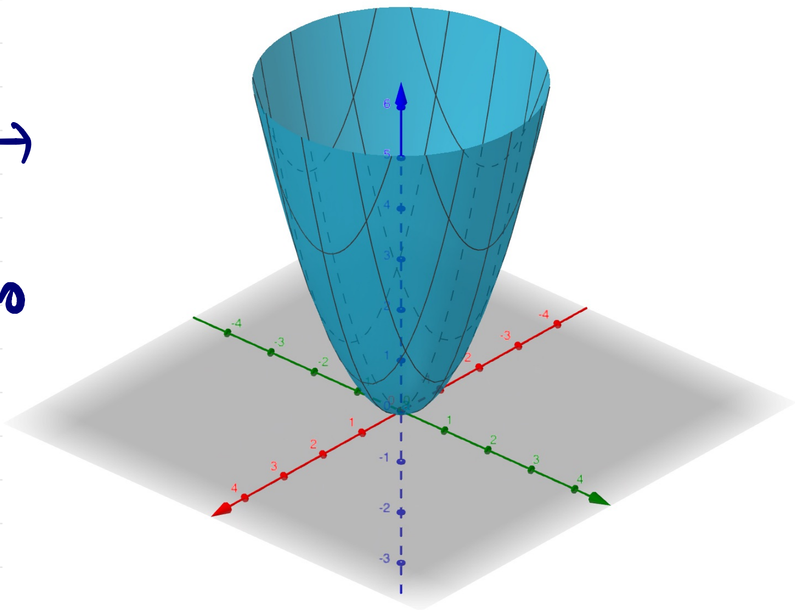
$z = C$;

$x^2 + y^2 = C$ é circunferência, no plano $z = c$

Seja $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $z = f(x,y)$

o gráfico de f (no $\mathbb{R}^3$) é uma superfície, e o traçado de muitos delas é feito usando o estudo feito na geometria Analítica.

GRÁFICO DE $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ FEITO NO GEOGEBRA



06) $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - 4y^2}$$

Domínio $D(f) = ?$ gráfico do domínio?

- esboço gráfico de f. ?

SOLUÇÃO: $D(f) = ?$

$$1 - x^2 - 4y^2 \geq 0$$

$$-x^2 - 4y^2 \geq -1 \iff x^2 + 4y^2 \leq 1$$

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} \leq 1$$

(região interna de uma elipse)

$$\Omega = D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1\}$$

gráfico do domínio:

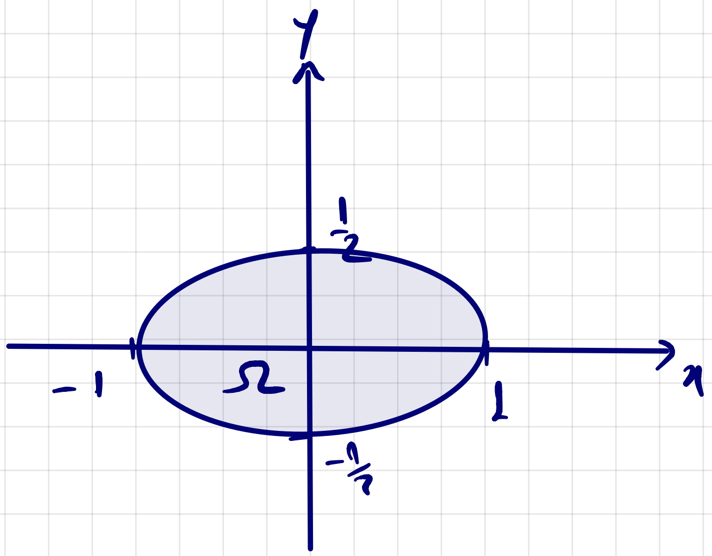


gráfico de f: $z = f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - 4y^2}$

$$z^2 = 1 - x^2 - 4y^2$$

$$\boxed{x^2 + 4y^2 + z^2 = 1}$$

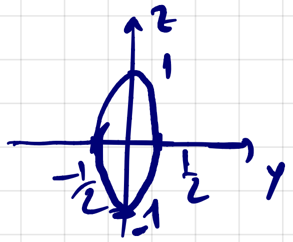
$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} + \frac{z^2}{1} = 1 \quad \text{(elipsoide)}$$

$$z = f(x,y) = \sqrt{\cdot} \geq 0$$

traços:

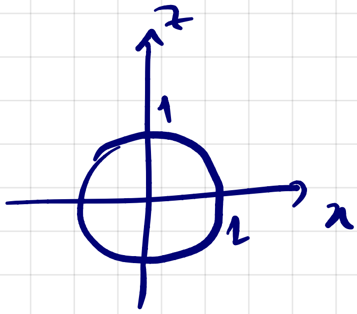
- $x = 0$ (plano yz)

  $4y^2 + z^2 = 1$ (elipse)



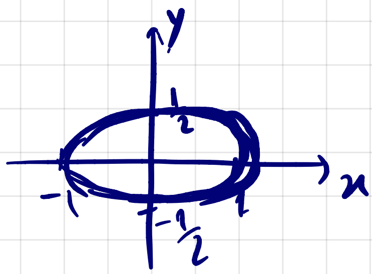
- $y = 0$: (plano xz):

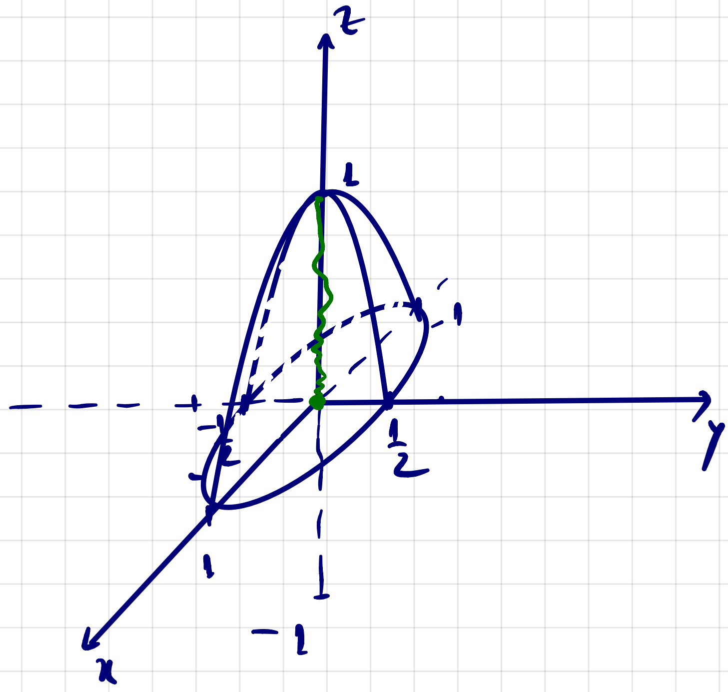
  $x^2 + z^2 = 1$ circunferência



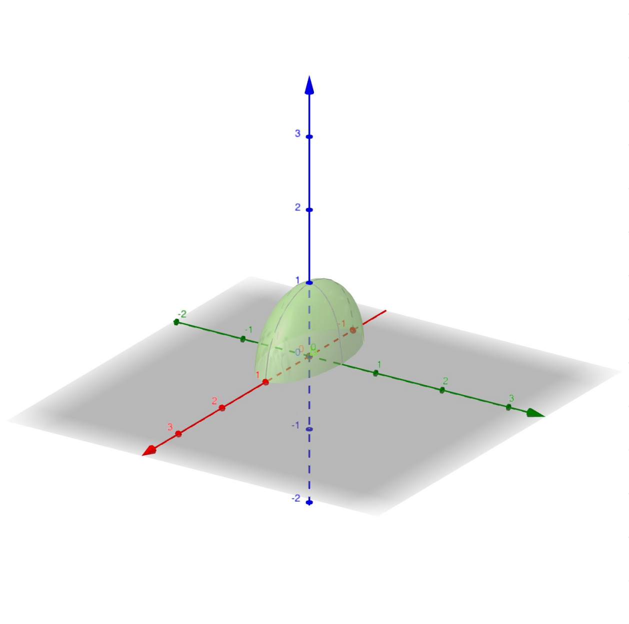
• $z=0$: (plano xy)

$x^2+4y^2=1$ (elipse)





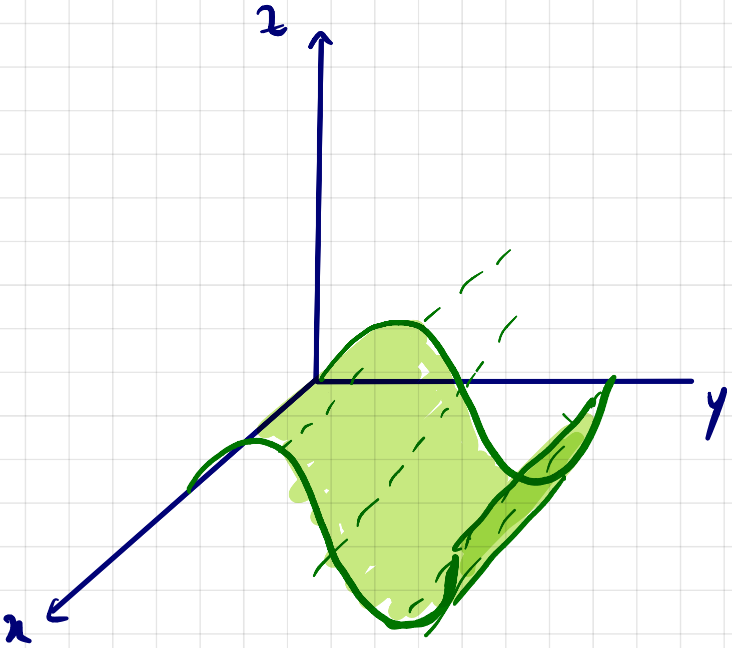
$\text{Im}(f) = [0,1]$.



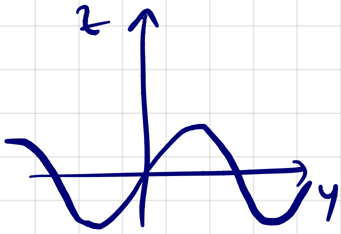
← PELO GEOGEBRA.

07) $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$f(x,y) = \operatorname{sen} y$

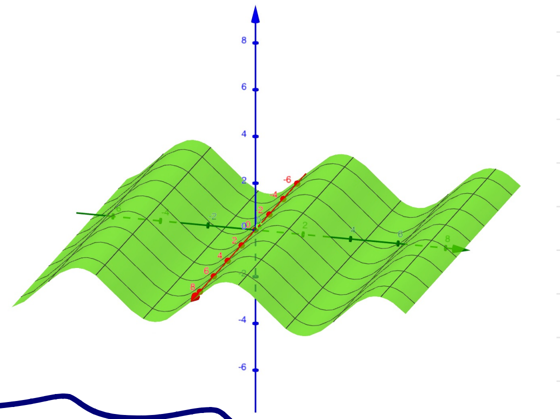


$z = \operatorname{sen} y$



$D(f) = \mathbb{R}^2$

PELO GEOGEBRA.



obs.:

Dada $z = f(x,y)$, $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, quando $z = c$,

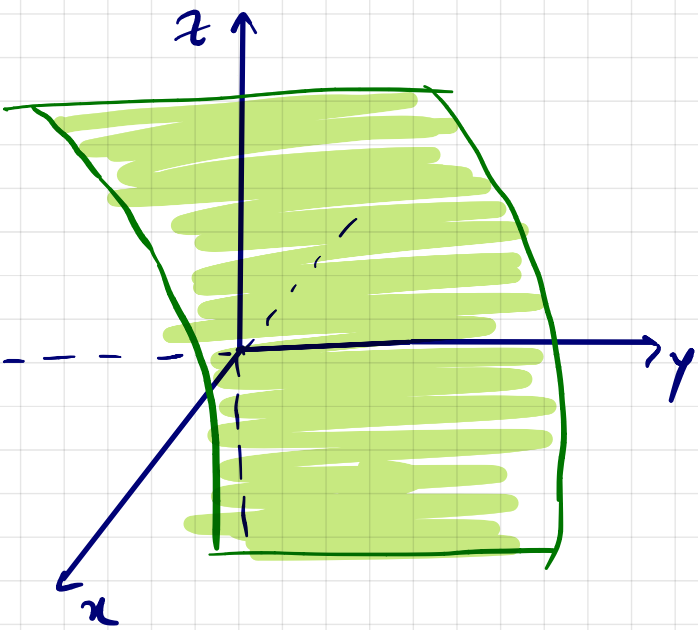
a eq. $f(x,y) = c$ forma uma CURVA DE NÍVEL da f. Então, $x^2 + y^2 = c$, no exemplo 05, são curvas de nível para a f dada.

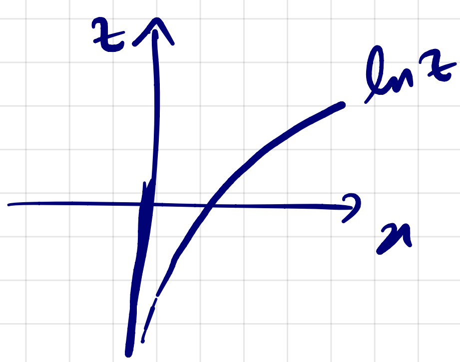
03) $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \ln x$.

$D(f) = ?$ $x > 0$.

$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$

gráfico do domínio: $z = \ln x$





PELO
GEOGEBRA