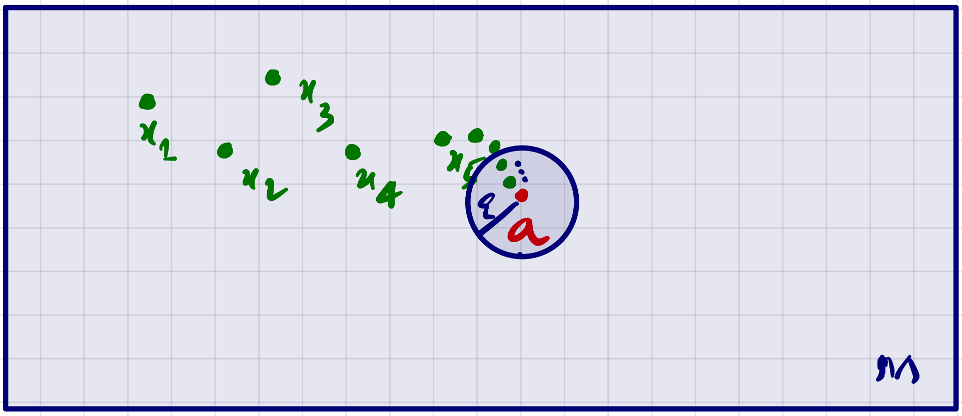
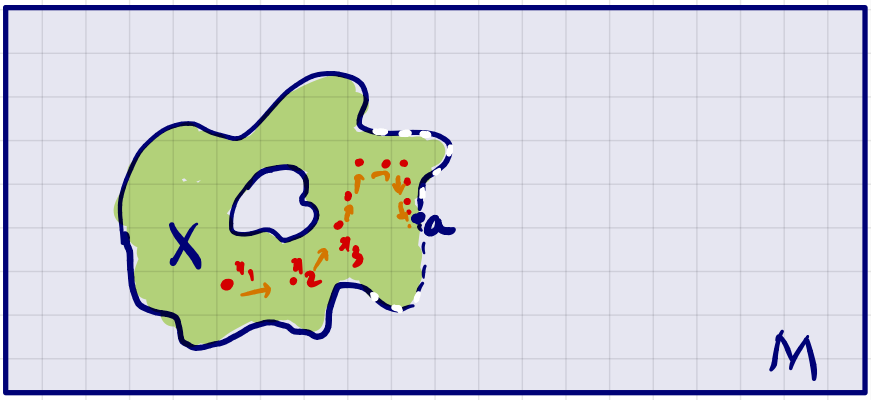
09/08/23 — AULA 14.

Def.: Seja (M,d) um espaço métrico, e $(x_n) \subset M$ uma sequência de pontos em M. Diremos que $a \in M$ é o limite da seq. (x_n) se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$.



NOTAÇÃO: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ ou $x_n \to a$.

Def.: Sejam (M,d) um espaço métrico e $X \subset M$ um conj. não vazio. Dizemos que $a \in M$ é um ponto aderente do conj. X se existir uma sequência $(x_n) \subset X$ de elementos de X tal que $x_n \to a$.



Na ilustração temos:

$a \notin X$ $(a \in M)$

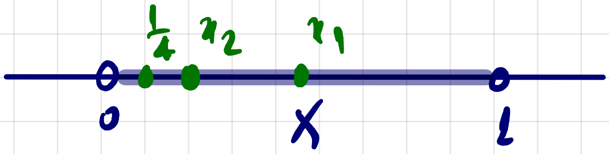
mas $a \in M$ é aderente a X, pois $\exists (x_n) \subset X$ tal que $x_n \to a$.

Ex.: $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ – reais com a métrica d induzida pelo módulo: $d(x,y) = |x-y|$.

Tome $X = (0,1)$.

Então $0 \notin X$ e $1 \notin X$.

Porém, é fácil notar que 0 e 1 são aderentes ao conj. X. De fato:



Tome (x_n) dado por $x_n = \dfrac{1}{n+1}$

$x_1 = \dfrac{1}{2} \in X$

$x_2 = \dfrac{1}{3} \in X$

$x_3 = \dfrac{1}{4} \in X$

$\vdots$

Obviamente, $x_n \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0$$

Logo, 0 é aderente ao conj. X.

Do mesmo modo se mostra que 1 é aderente ao conj. X. Basta tomar a sequência

$$y_n = 1 - \frac{1}{n+1};$$

$$\text{Então: } \left.\begin{array}{l} y_n \in X, \ \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{e } \ y_n \to 1. \end{array}\right\} \Rightarrow 1 \text{ é aderente ao conj. } X.$$

Note que se $a \in X \subset M$, então a é aderente ao conj. X, pois, neste caso simples, basta tomar a seq. constante

$$(x_n) = (a, a, a, a, \ldots)$$

Disso:

$$x_n \in X, \ \forall n \quad e \quad x_n \to a.$$

<u>Def.</u>: O conj. de todos os pontos aderentes ao conjunto $X \subset M$ chama-se FECHO de X, e denotamos por $\overline{X}$.

Ou seja:

$$\overline{X} = \{ x \in M : \exists (x_n) \subset X \text{ tal que } x_n \to x \}.$$

Note que $X \subset \overline{X}$ pois, $\forall x \in X$, tomando a seq. constante $x_n = x$, $\forall n$, teremos que $x_n \to x$., i.e., $x \in \overline{X}$.

$(x_n) = (x, x, x, \ldots)$

<u>Def.</u>: Dizemos que um conj. $X \subset M$, onde M é espaço métrico, é FECHADO se $X = \overline{X}$.

Como sempre vale que $X \subset \overline{X}$, c.f. observado acima, podemos enfraquecer a def. acima pondo:

$X \subset M$ é fechado $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\overline{X} \subset X$.

EX.: $X = [0,1]$ é fechado em $\mathbb{R}$, pois se, por absurdo, suponho que $\overline{X} \not\subset X$, então $\exists\, a \in \overline{X}$ tal que $a \notin X$.

Como $a \in \overline{X}$, então, $\exists\, (x_n) \subset X$ tal que $x_n \to a$, sendo $X = [0,1]$, e como X é um intervalo fechado, somos forçados a concluir que $a \in X$. Mas $a \notin X$, Absurdo! Logo, $\overline{X} \subset X$, i.e., X é fechado.

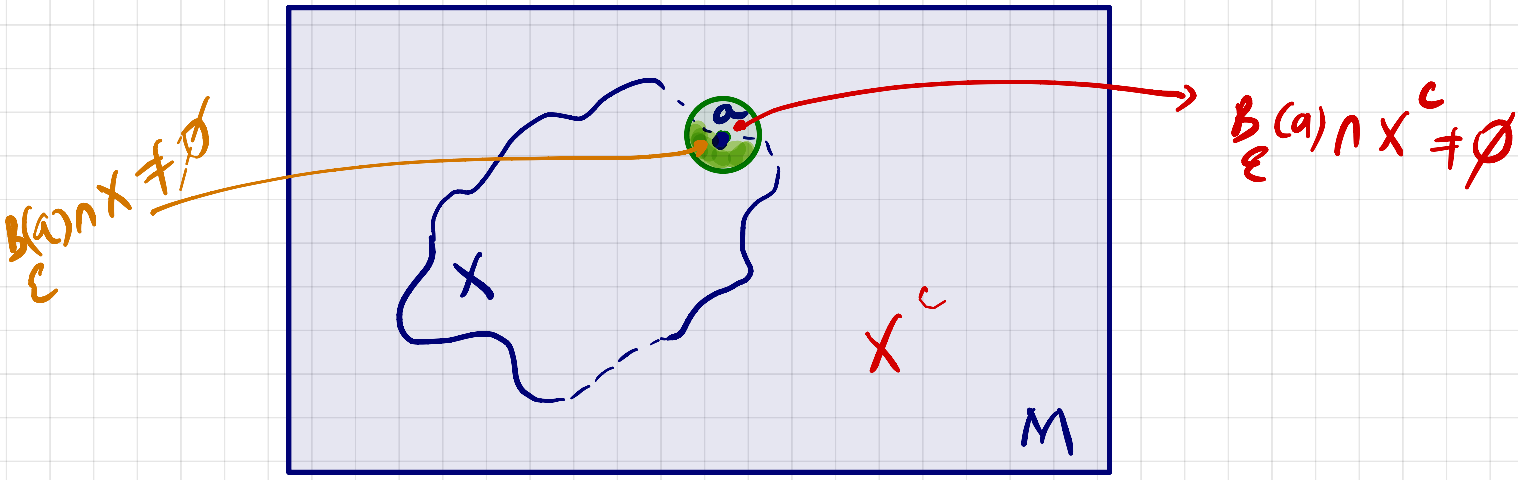
PROPOSIÇÃO: Sejam M um espaço métrico e $X \subset M$. Então X é fechado de M se, e somente se, o seu complementar, $X^c = M \setminus X$ for um aberto de M.

DEMONSTR.: É dada em cursos de Análise.

EX.: $[0,1] \subset \mathbb{R}$ é fechado de $\mathbb{R}$, pois o seu complementar: $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ é um aberto.

Def.: Sejam M um espaço métrico e $X \subset M$. Diremos que $a \in M$ é um ponto de fronteira do conjunto X se, $\forall \varepsilon > 0$,

$$B_\varepsilon(a) \cap X \neq \emptyset \quad \text{e} \quad B_\varepsilon(a) \cap X^c \neq \emptyset .$$



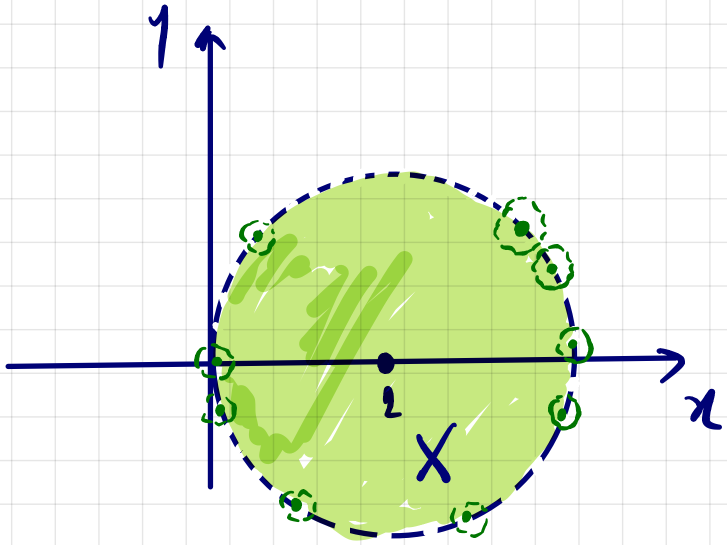
O conjunto de todos os pontos de fronteira de um conj. X chama-se FRONTEIRA de X, e é denotado por ∂X.

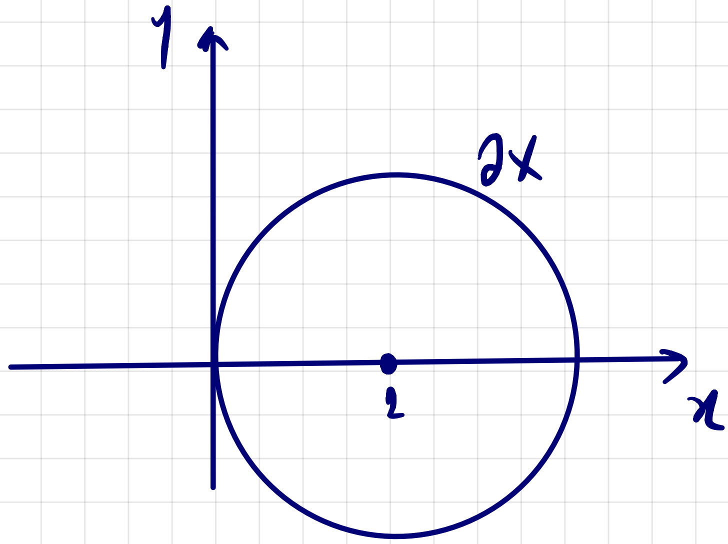
Ex.: $(M, d) = (\mathbb{R}^2, d_2)$:

$$X = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : d((x,y);(1,0)) < 1 \}$$

Então:

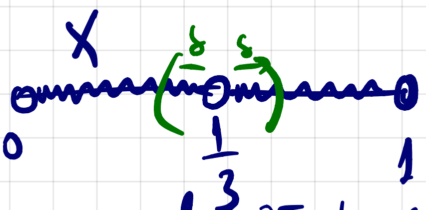
$$\partial X = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : d((x,y);(1,0)) = 1 \}.$$





Def.: Dizemos que $a \in M$ é um ponto de acumulação de um conjunto $X \subset M$ se, e só se, $\exists\, \delta > 0$ tal que $\left(B_\delta(a) \setminus \{a\}\right) \cap X \neq \emptyset$.

EXEMPLO: $X \subset \mathbb{R}$.



$\frac{1}{3}$ é ponto de acumulação de X, pois para δ pequeno; $\left(B_\delta\left(\frac{1}{3}\right) \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}\right) \cap X \neq \emptyset$