04/08/23 – AULA 13

NOÇÕES DE TOPOLOGIA NO $\mathbb{R}^m$.

Def.: Seja $M \neq \emptyset$ um conjunto não vazio. Dizemos que uma função $d : M \times M \to [0, +\infty)$ é uma MÉTRICA em M se, e somente se, cumprir as propriedades: $\forall x, y, z \in M$, tivermos:

(i) $d(x,y) \geq 0$ e $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (POSITIVIDADE)

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ (SIMETRIA)

(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (DESIGUALDADE TRIANGULAR)

Um conjunto $M \neq \emptyset$ equipado com uma métrica d, denotado por (M, d) chama-se um ESPAÇO MÉTRICO.

Quando não houver confusão, podemos, simplesmente dizer M como espaço métrico, sendo que a métrica d fica subtendida.

EX.: 01) em $\mathbb{R}$, tome a métrica usual, induzida pelo módulo:

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, +\infty)$$
$$d(x,y) = |x - y|$$

De fato, d define uma métrica em $\mathbb{R}$, pois; $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, temos:

(i) $d(x,y) = |x-y| \geq 0$; e

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow |x-y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$$
$$\Leftrightarrow x = y$$

(ii) $d(x,y) = |x-y| = |y-x| = d(y,x)$

(iii) $d(x,y) = |x-y| = |(x-z)+(z-y)| \leq$

$$\leq |x-z| + |y-z| = d(x,z) + d(y,z)$$

DESIGUALDADE TRIANGULAR DO MÓDULO.

---

02) $M = \mathbb{R}^2$. Define:

- $d_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, +\infty)$

$$d_1\big((x,y),(a,b)\big) = |x-a| + |y-b|$$

- $d_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, +\infty)$

$$d_2\big((x,y),(a,b)\big) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

• $d_\infty : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, +\infty)$

$$d_\infty((x,y);(a,b)) = \max\{|x-a| ; |y-b|\}.$$

Afirmamos que d_1, d_2 e d_∞ são métricas em $\mathbb{R}^2$. Assim,

$$(\mathbb{R}^2, d_1) \;;\; (\mathbb{R}^2, d_2) \;;\; (\mathbb{R}^2, d_\infty)$$

são espaços métricos.

- d_1 chama-se métrica da soma
- d_2 chama-se métrica euclidiana (e esta não será provada por exigir resultados que transcedem um curso tradicional de Cálculo)
- d_∞ chama-se métrica infinita.

<u>Obs.</u>: $(\mathbb{R}^2, d_2)$ chama-se espaço métrico euclidiano.

<u>Obs.</u>: Estas métricas se estendem para $\mathbb{R}^m$

<u>Ex.</u>: $(\mathbb{R}^m, d_2)$ é espaço métrico euclidiano

com

$$d_2 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow [0, +\infty)$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$$
$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$$

$$\Rightarrow d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2}$$

$$= \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \cdots + (x_m-y_m)^2}.$$

$(\mathbb{R}^m, d_2)$ – espaço métrico euclidiano m-dimensional.

---

03) $M \neq \emptyset$ e $d: M \times M \to [0, +\infty)$ definida por

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \neq y \\ 0, & \text{se } x = y \end{cases},$$

chamada de métrica discreta.

(M, d) chama-se espaço métrico discreto.

---

04) $M = \{ f: A \to \mathbb{R} : f$ é limitada$\}$.

e seja $d: M \times M \to [0, +\infty)$ definida por:

$$d(f,g) = \sup_{x \in A} | f(x) - g(x) | .$$

(M, d) é um espaço métrico, pois, $\forall f, g, h \in M$; temos:

(i) $d(f,g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)| \geq 0$; e

$$d(f,g)=0=\sup_{x\in A}|f(x)-g(x)|=0$$

$$\Leftrightarrow |f(x)-g(x)|=0,\ \forall x\in A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)-g(x)=0,\ \forall x\in A$$

$$\Leftrightarrow f=g$$

(ii) $$d(f,g)=\sup_{x\in A}|f(x)-g(x)|=\sup_{x\in A}|g(x)-f(x)|$$

$$=d(g,f)$$

(iii) $$d(f,g)=\sup_{x\in A}|f(x)-g(x)|=$$

$$=\sup_{x\in A}|f(x)-h(x)+h(x)-g(x)|\leq$$

$$\leq\sup_{x\in A}\left(|f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|\right)\leq$$

$$\leq\sup_{x\in A}|f(x)-h(x)|+\sup_{x\in A}|h(x)-g(x)|=$$

$$d(f,h)+d(h,g)$$

BOLAS ABERTAS E FECHADAS:

Def: Seja (M,d) um espaço métrico, e $a \in M$.

Definimos a <u>bola aberta</u> em a, com raio $R>0$, o conjunto

$$B(a,R) = B_R(a) = \{ x \in M : d(x,a) < R \}$$

Analogamente definimos a <u>bola fechada</u> centrada em a e raio $R>0$:

$$B[a,R] = \overline{B_R(a)} = \{ x \in M : d(x,a) \leq R \}.$$

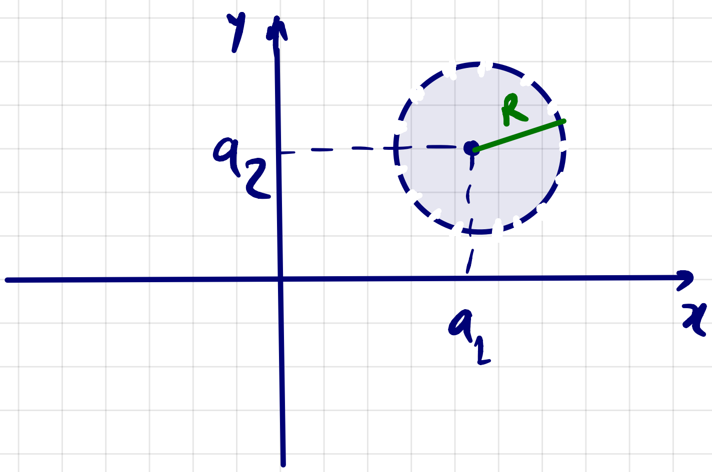
EXEMPLOS: $M = (\mathbb{R}^2, d_2)$

$$B_R(a) = \{ x \in \mathbb{R}^2 : d_2(x,a) < R \}$$

Escrevendo $x = (x_1, x_2)$; $a = (a_1, a_2)$, então:

$$B_R(a) = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : d_2((x_1, x_2),(a_1, a_2)) < R \}$$

$$= \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} < R \}$$



Ex.: $(\mathbb{R}^2, d_1)$ $\qquad 0=(0,0)$

$(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$B_1(0) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : d_1((x,y),(0,0))<1\}$$

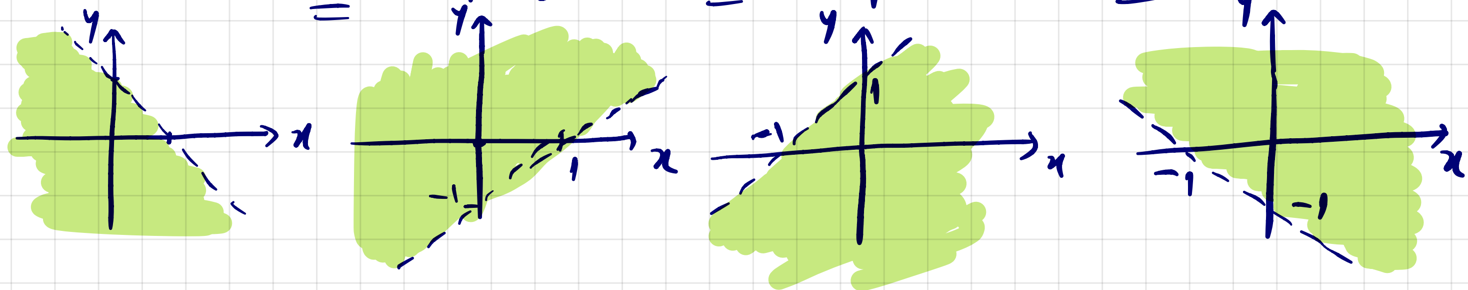
$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x-0|+|y-0|<1\}$$

$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y|<1\}$$

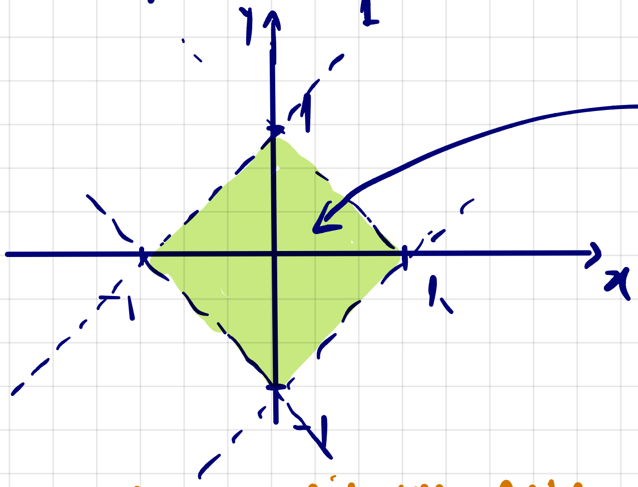
Vamos desenhar $B_1(0)$ com a métrica d_1. Note que:

$$|x|+|y| = \begin{cases} x+y, & \text{se } x\geq 0 \text{ e } y\geq 0 \\ x-y, & \text{se } x\geq 0 \text{ e } y<0 \\ -x+y, & \text{se } x<0 \text{ e } y\geq 0 \\ -x-y, & \text{se } x<0 \text{ e } y<0 \end{cases} < 1.$$

1º: $x+y<1$: $\quad$ 2º: $x-y<1$: $\quad$ 3º: $-x+y<1$: $\quad$ 4º: $-x-y<1$:



Por fim, a região que satisfaz os 4 casos ao mesmo tempo compõe $B_1(0)$.



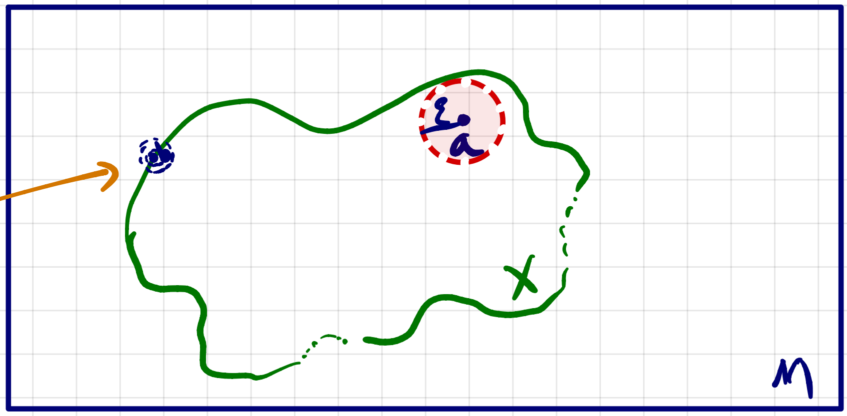
$B_1(0)$

OU SEJA, A BOLA É UM QUADRADO CENTRADO NA ORIGEM E VÉRTICES NOS EIXOS COORDENADOS.

SERÁ QUE O KIKO, DO CHAVES, QUERIA UMA BOLA QUADRADA POR SER INGÊNUO, OU POR USAR OUTRA MÉTRICA ALÉM DA EUCLIDIANA?

Obs: Usaremos a métrica euclidiana, salvo menção contrária.

Def.: Seja (M, d) um espaço métrico e $X \subset M$.
Dizemos que $a \in X$ é um ponto interior de X se, e somente se, $\exists\, \varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(a) \subset X$.



b NÃO É PONTO INTERIOR DE X POIS, $\forall \varepsilon > 0$ $B_\varepsilon(b) \not\subset X$.

O conjunto de todos os pontos interiores do conj X chama-se interior de X, e denotamos por $\operatorname{int} X$.

PROPOSIÇÃO: Sejam $X, Y \subset M$, onde M é um espaço métrico. Então,

$$X \subset Y \Rightarrow \operatorname{int} X \subset \operatorname{int} Y.$$

DEMONSTRAÇÃO: Suponha $X \subset Y$.

Vamos mostrar que $\operatorname{int} X \subset \operatorname{int} Y$.

Para isto, dado $a \in \operatorname{int} X$, precisamos mostrar que $a \in \operatorname{int} Y$.

Como $a \in \operatorname{int} X$, segue que $\exists\, \varepsilon > 0$ tal que

$$B_\varepsilon(a) \subset X \subset Y$$

POR HIPÓTESE

Logo, temos $B_\varepsilon(a) \subset Y$, ou seja, $a \in \operatorname{int} Y$.

$\square$

Def.: Seja (M, d) espaço métrico e $X \subset M$.

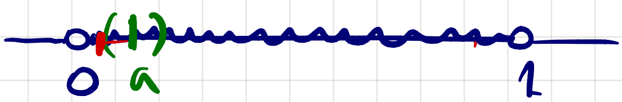
Dizemos que X é um aberto de M se, e só se, todos os seus pontos forem interiores.

Mais precisamente, X é aberto de M se, e somente se,

$$\forall a \in X,\ \exists\, \varepsilon > 0 \text{ tal que } B_\varepsilon(a) \subset X.$$

Ex.: $M = \mathbb{R}$; $d(x,y) = |x - y|$.

$X = (0, 1)$ é um aberto de $\mathbb{R}$



$\forall a \in (0,1)$; tome $\varepsilon = \min\left\{ \dfrac{d(a,0)}{2} ; \dfrac{d(1,a)}{2} \right\}$

Logo, $B_\varepsilon(a) \subset (0,1)$.