16/08/23 — AULA 16

Na aula passada iniciamos o estudo de funções

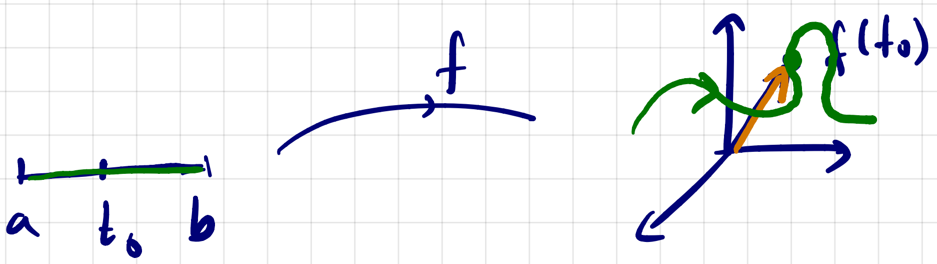
$$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \longmapsto f(x) =$$

$$= \underbrace{(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))}_{\text{n FUNÇÕES COORDENADAS A m VARIÁVEIS CADA UMA.}}$$

$$\begin{cases} f_1(x) = f_1(x_1, \dots, x_m) \\ \vdots \\ f_n(x) = f_n(x_1, \dots, x_m) \end{cases}$$

eg) $f: \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Estes tipos de funções são chamados de funções vetoriais a uma variável real.



Por exemplo: $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$;

$$f(t) = (t, \ln t, 2).$$

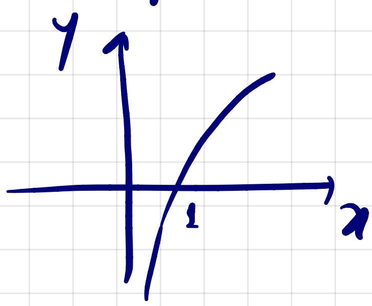
Neste caso, o domínio tomamos $(0, +\infty)$, pois das 3 funções coordenadas;

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \ln t \\ z(t) = 2 \end{cases},$$

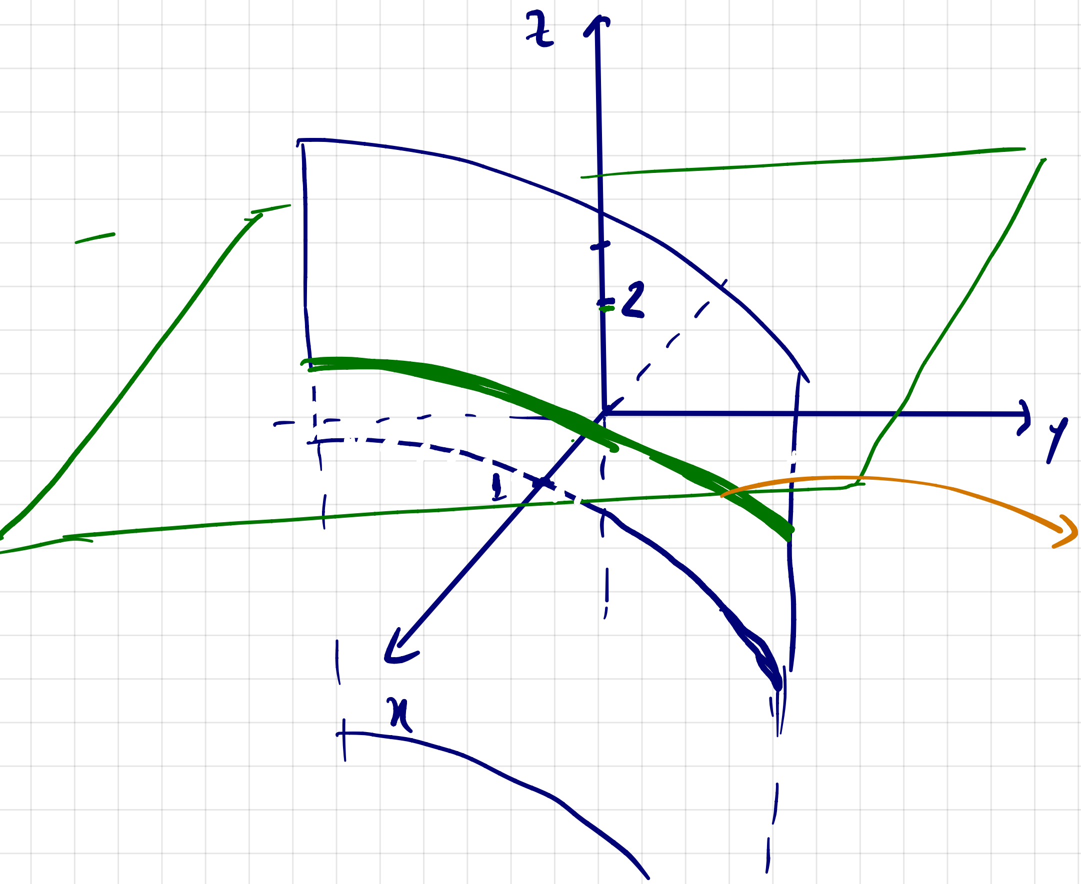
temos que $x(t)$ e $z(t)$, neste caso, estão definidas $\forall t \in \mathbb{R}$; mas $y(t) = \ln t$ só tem sentido se $t > 0$

Note que, $\begin{cases} x = t \\ y = \ln t \\ \boxed{z = 2} \end{cases}$ $y = \ln x$

↳ no plano xy:



No $\mathbb{R}^3$, teremos o cilindro:



$f(t) = (t, \ln t, 2)$

10) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, dada por

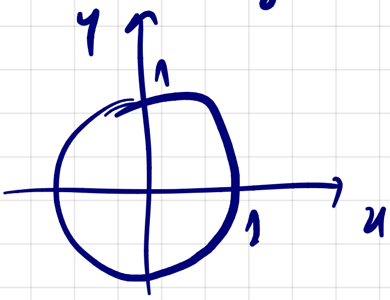
$$f(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t).$$

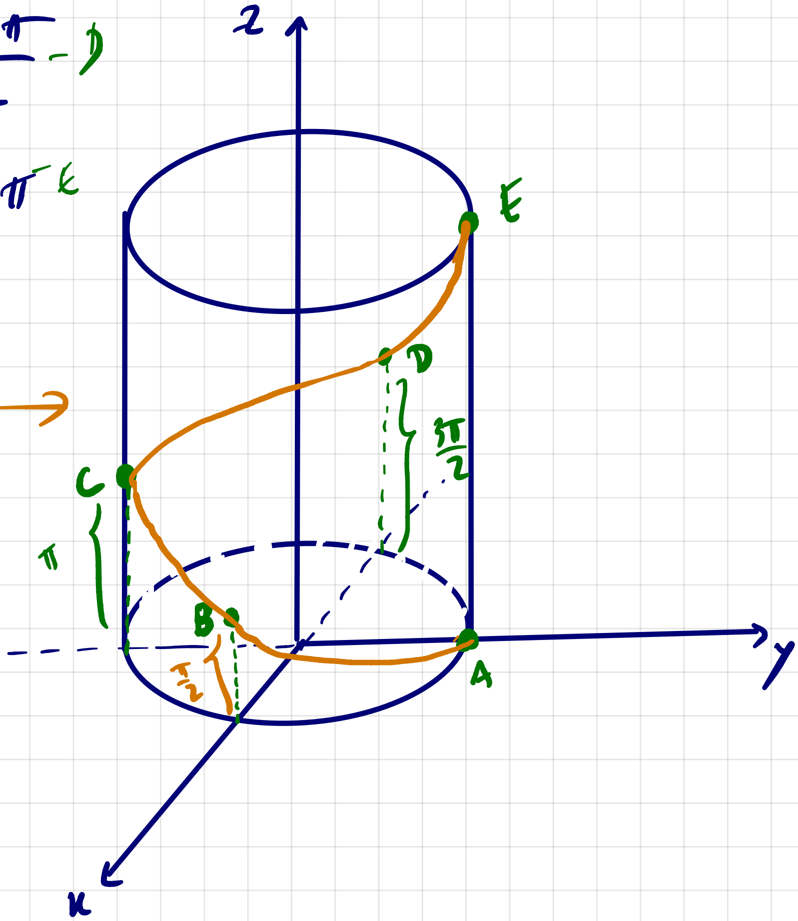
$$\begin{cases} x = \operatorname{sen} t \\ y = \cos t \\ z = t \end{cases} \longrightarrow \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

↳ no plano xy temos uma circunferência de raio unitário centrada na origem.

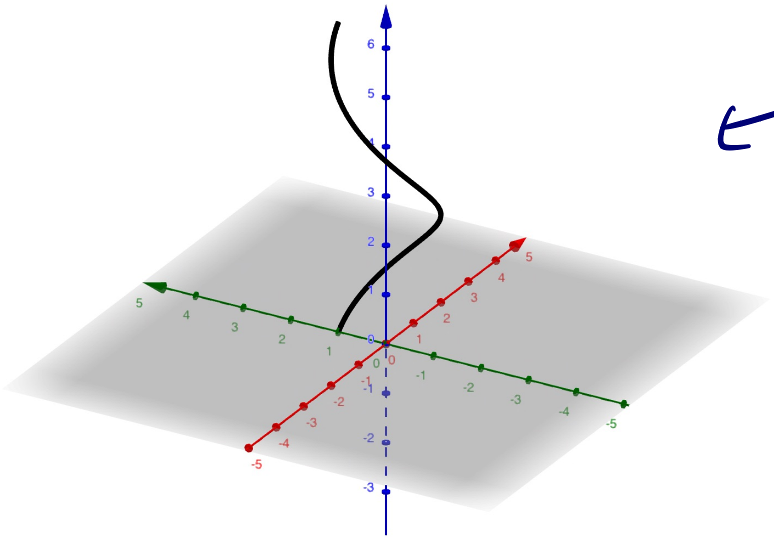
t	$x = \operatorname{sen} t$	$y = \cos t$	$z = t$	
0	0	1	0	A
$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\frac{\pi}{2}$	B
π	0	-1	π	C
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$\frac{3\pi}{2}$	D
2π	0	1	2π	E





CURVA ESPIRAL

(pense na espiral de um caderno)



← PELO GEOGEBRA.

EXERCÍCIO: Desenhe o gráfico do domínio Ω de $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x \cdot \ln(xy-1)$

Decida se Ω é um aberto ou fechado ou nem aberto e nem fechado do $\mathbb{R}^2$.

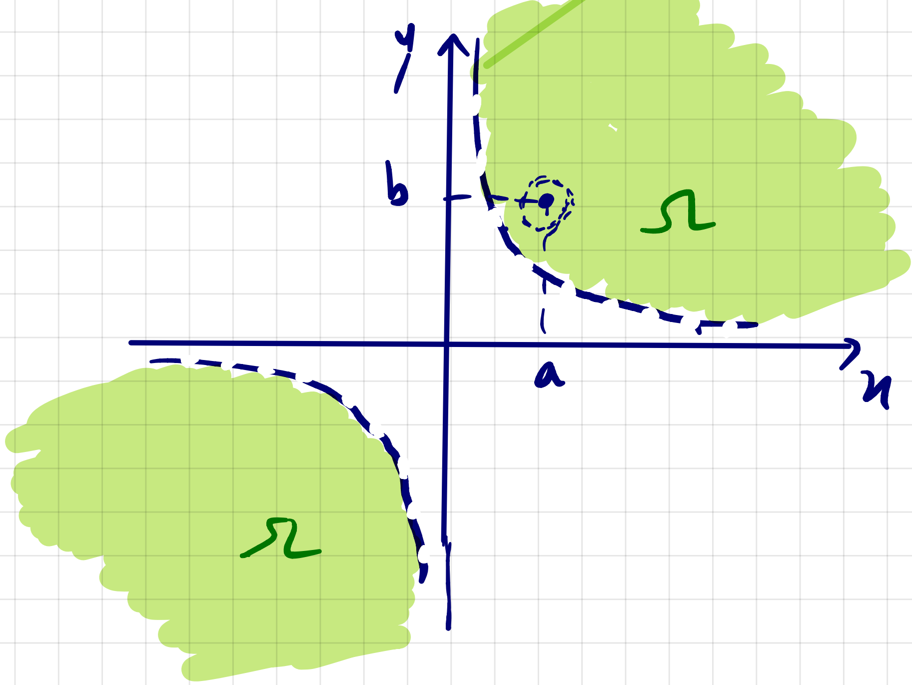
SOLUÇÃO: Analisando condições de existência para f, concluímos que

$$xy - 1 > 0$$ [devido ao Logaritmo]

$$\Rightarrow xy > 1 \sim y > \frac{1}{x}$$

$$\Omega = D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y > 1\}$$

GRÁFICO DO DOMÍNIO:



Ω é um aberto do $\mathbb{R}^2$.

Pois $\forall (a,b) \in \Omega$, $\exists\, \delta > 0$ tal que $B_\delta(a,b) \subset \Omega$

LIMITES DE FUNÇÕES DO $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$:

Def.: Seja $f : \Omega : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função,

$a \in \mathbb{R}^m$ um ponto de acumulação (*) do conj. Ω.

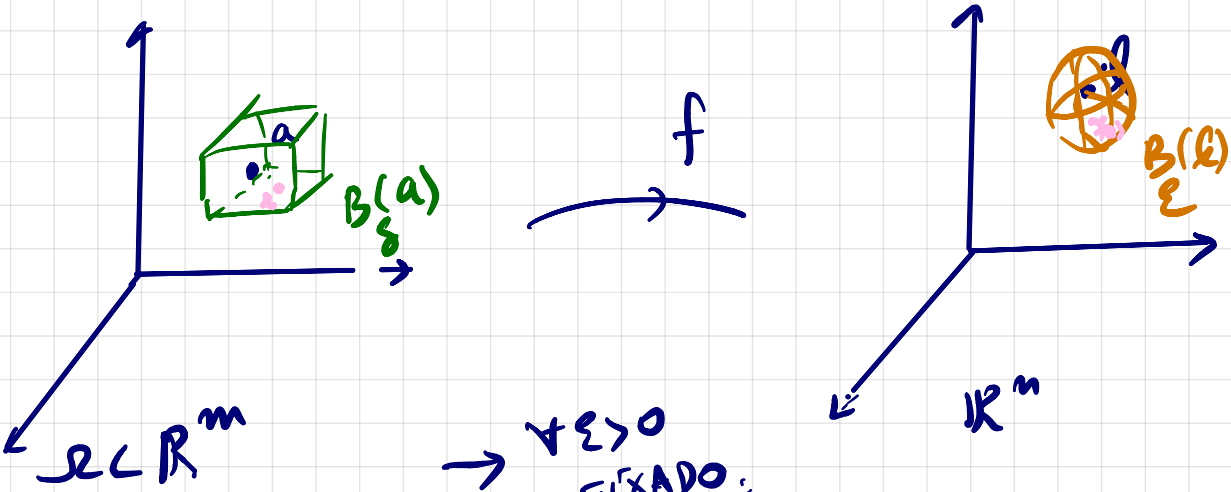
Dizemos que $l \in \mathbb{R}^n$ é o limite de $f(x)$ quando x tende para a, e escrevemos

$\lim_{x \to a} f(x) = l$ se, e somente se,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que}; \forall x \in B_\delta(a) \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(l).$$

(*) Lembre-se: $a \in \mathbb{R}^m$ é ponto de acumulação de um conj. Ω se $\forall \delta > 0$, $(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap \Omega \neq \emptyset$.

Naturalmente, estas bolas dependerão das métricas que serão usadas em $\mathbb{R}^m$ e em $\mathbb{R}^n$.



→ $\forall \varepsilon > 0$ FIXADO, CONSTRÓI $B(\ell)$

→ VAI EXISTIR $\delta > 0$; TAL QUE, $\forall x \in B_\delta(a) \Longrightarrow f(x) \in B_\varepsilon(\ell)$

Vejamos alguns exemplos:

(a) $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$; $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$

$$(\mathbb{R}^2, d_1) \quad ; \quad (\mathbb{R}^3, d_2)$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \quad ; \quad \ell = (\ell_1, \ell_2, \ell_3)$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad x = (x_1, x_2)$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que,

$$\forall x \in \Omega : \; 0 < d_1(x, a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), \ell) < \varepsilon$$

ou seja, sendo $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$

$\lim_{x \to a} f(x) = l \iff$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que: $\forall x \in \Omega$:

$$0 < |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| < \delta \implies$$

$$\implies \sqrt{(f_1(x) - l_1)^2 + (f_2(x) - l_2)^2 + (f_3(x) - l_3)^2} < \varepsilon$$

(b) $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$z = f(x, y)$

$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y) = l \in \mathbb{R} \iff$

$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que:

$\forall (x,y) \in \Omega$: $(x,y) \in B_\delta((a,b)) \setminus \{(a,b)\} \implies$

$$\implies f(x) \in B_\varepsilon(l)$$

usando $(\mathbb{R}^2, d_2)$; $(\mathbb{R}, |\cdot|)$; temos:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l \in \mathbb{R} \iff$$

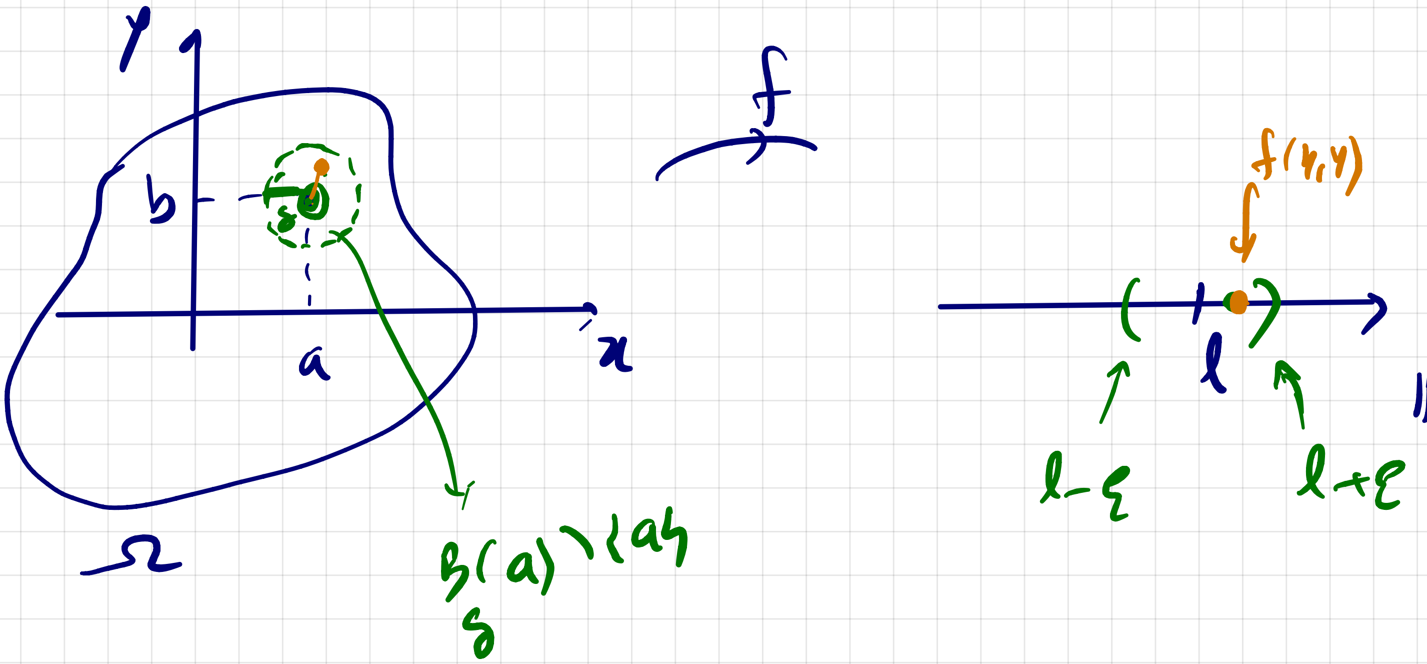
$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$ tal que,

$$\forall (x,y) : 0 < d_2\big((x,y),(a,b)\big) < \delta \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$$

i.e.,

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$ tal que

$$\forall (x,y) : 0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$$



Obs.1 Sempre que não estiver indicada a métrica em $\mathbb{R}^m$, usaremos a métrica euclidiana; e no caso em $\mathbb{R}$ a métrica induzida pelo módulo: $d(x,y) = |x-y|$.

(c) $f : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$; $(\mathbb{R}, |\cdot|)$; $(\mathbb{R}^2, d_2)$

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t))$$

$$\lim_{t \to a} f(t) = l = (l_1, l_2) \in \mathbb{R}^2 \overset{def.}{\iff}$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que, $\forall x \in \Omega : 0 < |x - a| < \delta$

$$\Rightarrow d_2(f(t), l) < \varepsilon,$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{(f_1(t) - l_1)^2 + (f_2(t) - l_2)^2} < \varepsilon.$$

Vejamos alguns exemplos de aplicação:

01) Prove que $\lim_{t \to 2} \left(2t + 1, \frac{1}{t^2}\right) = \left(5, \frac{1}{4}\right)$

<u>solução</u>: Dado $\varepsilon > 0$, precisamos achar $\delta > 0$ tal que: $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que

$$0 < |t - 2| < \delta \Rightarrow d_2\left(f(t), \left(5, \frac{1}{4}\right)\right) < \varepsilon$$

Vamos analisar

$$d_2\left(f(t), \left(5, \frac{1}{4}\right)\right):$$

$$d_2\left(f(t),\left(5,\tfrac{1}{4}\right)\right) = d_2\left(\left(2t+1, \tfrac{1}{t^2}\right),\left(5,\tfrac{1}{4}\right)\right)$$

$$= \sqrt{(2t+1-5)^2 + \left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{(2t-4)^2 + \left(\frac{4-t^2}{4t^2}\right)^2}$$

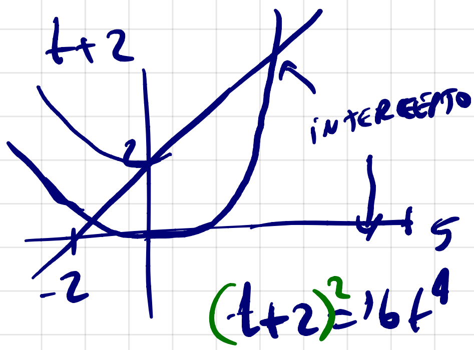
$$= \sqrt{4\cdot(t-2)^2 + \frac{(t^2-4)^2}{16t^4}} = \sqrt{4(t-2)^2 + \frac{(t+2)^2(t-2)^2}{16t^4}}$$

$$= \sqrt{\underbrace{(t-2)^2}_{>0}\cdot \underbrace{\left[4+\frac{(t+2)^2}{16t^4}\right]}_{>0}} =$$

$$= \underbrace{\sqrt{(t-2)^2}}_{|t-2|<\delta}\cdot\sqrt{4+\frac{(t+2)^2}{16t^4}} = \underbrace{|t-2|}_{<\delta}\cdot\sqrt{4+\frac{(t+2)^2}{16t^4}} <$$

$$< \delta\cdot\sqrt{4+\underbrace{\frac{(t+2)^2}{16t^4}}_{<1<5}} < \delta\cdot\sqrt{4+5} = 3\delta := \varepsilon$$

Tome $\boxed{\delta = \frac{\varepsilon}{3}}$



Ou seja, dado $\varepsilon>0$, basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, o que mostra o limite.