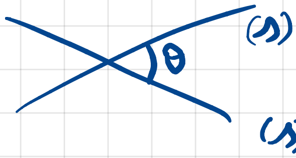
LISTA 02 (ALGUMAS SOLUÇÕES).

04) $(r): 2x+3y=1$ $\qquad$ $(s): y=-5x+8$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \rightarrow m_r = -\frac{2}{3}$$

$$\rightarrow m_s = -5$$



$$\Rightarrow \tan\theta = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s}\right| = \left|\frac{-\frac{2}{3} - 5}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot(-5)}\right| =$$

$$= \left|\frac{-\frac{17}{3}}{1 + \frac{10}{3}}\right| = \left|\frac{-\frac{17}{\cancel{3}}}{\frac{13}{\cancel{3}}}\right| = \frac{17}{13}$$

SOLUÇÃO: O ângulo θ entre (r) e (s) é tal que $\tan\theta = \frac{17}{13}$.

---

06) Dados um ponto $A(x_A, y_A)$ e uma reta (r) de equação $(r): ax+by+cz+d=0$, a distância entre o ponto e a reta é dada pela fórmula:

$$d_{A(r)} = \left|\frac{a \cdot x_A + b \cdot y_A + c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$

(esta fórmula "esqueci" de apresentar nas aulas)

Isto posto, vamos à resolução da questão:

Dados

$A(1,3)$ e $(r): 3x+4y+5=0$, então:

$$d_{A(r)} = \left| \frac{3.(1) + 4(3) + 5}{\sqrt{(3)^2 + (4)^2}} \right| = \left| \frac{3 + 12 + 5}{\sqrt{9+16}} \right| = \frac{20}{5} = 4.$$

---

08) $(t): 3x + 4y - 5 = 0$. $\qquad d_{A(t)} = ?$

onde:

$A = (r) \cap (s)$: $\begin{cases} 7x - 2y = 31 \\ 8x + 3y = 46 \end{cases} \rightsquigarrow y = \frac{46 - 8x}{3}$

$$7 \cdot x - 2 \cdot \left(\frac{46 - 8x}{3} \right) = 31 \qquad \times 3$$

$$21x - 92 + 16x = 93$$

$$37x = 185$$

$$x = \frac{185}{37} = 5$$

$$y = \frac{46 - 8 \cdot 5}{3} = 2 \qquad A(5, 2)$$

Assim, teremos:

$$d_{A(t)} = \left| \frac{3 \cdot x_A + 4 \cdot y_A - 5}{\sqrt{(3)^2 + (4)^2}} \right| = \left| \frac{3.5 + 4.2 - 5}{\sqrt{9 + 16}} \right| =$$

$$= \left| \frac{15 + 8 - 5}{5} \right| = \frac{18}{5}.$$

---

13) $4x^2 + 4y^2 - 12x + 8y + 9 = 0$

$C(h,k) = ?$ $\quad R = ?$

(a ideia consiste em completar quadrados)

$(\div 4)$

$x^2 + y^2 - 3x + 2y + \frac{9}{4} = 0$

SEPARA x DE y.

$\underbrace{x^2 - 3x}_{} + \underbrace{y^2 + 2y}_{} + 1 + \frac{9}{4} = 0 + 1$

$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} x + \frac{9}{4}$

$(y+1)^2 = y^2 + 2y + 1$

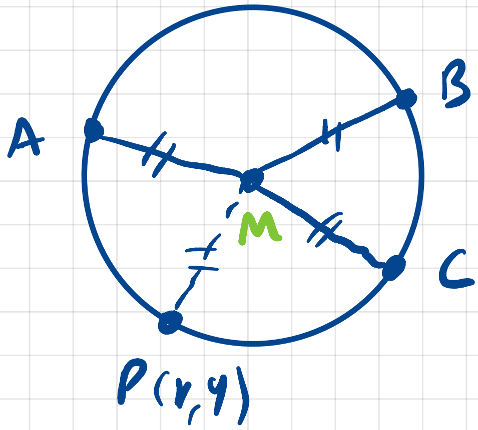
COMPLETA

$\Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y+1)^2 = 1$

$\Rightarrow (x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2$

Portanto: $\quad C\left(\frac{3}{2}, -1\right)$; e $R = 1$.

14) eq. que passa por $A(1,1)$; $B(1,-2)$ e $C(2,3)$



Seja $M(h,k)$ o centro da circunferência.

Assim, temos que

$R = d_{AM} = d_{BM} = d_{CM}$.
(RAIO)

$d_{AM} = d_{BM}$:

$$\sqrt{(1-h)^2+(1-k)^2} = \sqrt{(1-h)^2+(-2-k)^2}$$

$$\cancel{(1-h)^2} + (1-k)^2 = \cancel{(1-h)^2} + (2+k)^2$$

$$1 - 2k + \cancel{k^2} = 4 + 4k + \cancel{k^2}$$

$$6k = 3 \Rightarrow \boxed{k = \frac{1}{2}}$$

$d_{AM} = d_{CM}$:

$$\sqrt{(1-h)^2+(1-k)^2} = \sqrt{(2-h)^2+(3-k)^2}$$

$$(1-h)^2 + \left(1-\frac{1}{2}\right)^2 = (2-h)^2 + \left(3-\frac{1}{2}\right)^2 \quad \left[\text{Pois } k = \frac{1}{2}\right]$$

$$1 - 2h + \cancel{h^2} + \frac{1}{4} = 4 - 4h + \cancel{h^2} + \frac{25}{4}$$

$$2h = \underbrace{\frac{25}{4} - \frac{1}{4}}_{6} + 4 - 1$$

$$2h = 6 + 3 \Rightarrow \boxed{h = \frac{9}{2}}$$

Logo, o centro da circunferência procurada terá coordenadas $M\left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Como a medida do raio R é

$$R = d_{AM} = \sqrt{\left(1-\frac{9}{2}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \sqrt{\frac{25}{2}}$$

Assim, tendo $R = \sqrt{\frac{25}{2}}$ e $M\left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right)$, a eq. da circunferência centrada em M e raio R será:

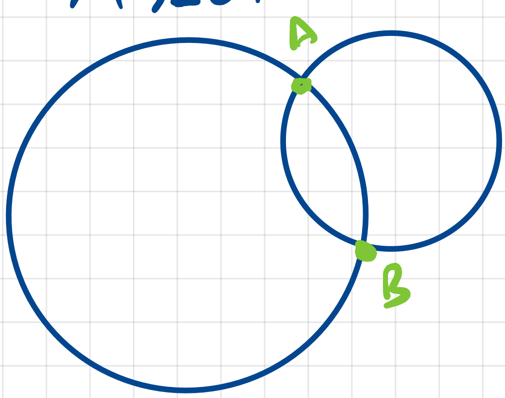
$$\left(x-\frac{9}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{25}{2}}\right)^2$$

$$\left(x-\frac{9}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}. \quad \text{(eq. geral)}$$

---

19) $(\gamma_1): x^2+y^2-8x-2y+7=0$

$(\gamma_2): x^2+y^2-6x-4y+9=0.$



a) Sejam $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ a interseção entre (γ_1) e (γ_2).

Então:

$$\begin{cases} x^2+y^2-8x-2y+7=0 \rightsquigarrow x^2+y^2=8x+2y-7 \\ x^2+y^2-6x-4y+9=0 \end{cases}$$

$$(8x+2y-7)-6x-4y+9=0$$

$$2x-2y+2=0$$

$$x-y+1=0 \rightsquigarrow \boxed{y=x+1.}$$

Levando esta relação para (γ_1) ou para (γ_2) encontraremos as coordenadas de A e de B:

Em (γ_1):

$$x^2+(x+1)^2-8x-2.(x+1)+7=0$$

$$x^2+x^2+\cancel{2x}+1-8x-\cancel{2x}-2+7=0$$

$$2x^2-8x+6=0 \quad (\div 2)$$

$$x^2-4x+3=0$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2\cdot 1} \quad \begin{cases} x=\frac{4+2}{2}=3 \quad (x_A) \\ x=\frac{4-2}{2}=1 \quad (x_B) \end{cases}$$

Então, sendo $x_A=3$ e $x_B=1$, na relação $y=x+1$, obtemos

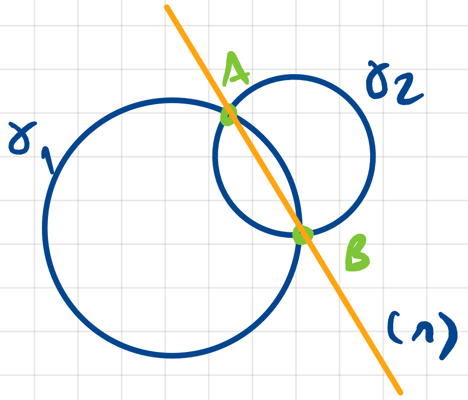
$$y_A=x_A+1=3+1=4 \quad ; e$$

$$y_B=x_B+1=1+1=2$$

Logo $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ serão:

$$A(3, 4) \quad ; \quad B(1, 2).$$

(b)



A eq. da reta (r) que passa por A e por B é obtida pela condição de alinhamento:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Assim:

$$(r): \left|\begin{array}{ccc|cc} x & y & 1 & x & y \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right| = 0$$

$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$

$$(r): 4x + y + 6 - 4 - 2x - 3y = 0$$

$$(r): 2x - 2y + 2 = 0$$

$$\boxed{(r): x - y + 1 = 0}$$