RESOLUÇÃO DE ALGUMAS QUESTÕES DA LISTA 01

02) Note que, $\forall x \in A \subset \mathbb{R}^m$,

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Integrando em A, obtemos:

$$\int_A m\,dx \leq \int_A f(x)\,dx \leq \int_A M\,dx$$

$$m \underbrace{\int_A 1 \cdot dx}_{\text{vol}(A)} \leq \int_A f(x)\,dx \leq M \cdot \underbrace{\int_A dx}_{\text{Vol}(A)}$$

$$m \cdot \text{Vol}\,A \leq \int_A f(x)\,dx \leq M \cdot \text{Vol}(A)$$

Dividindo por $\text{Vol}(A) \neq 0$, vamos encontrar

$$m \leq \frac{\int_A f(x)\,dx}{\text{Vol}\,A} \leq M$$

---

03) f cont. em A, mostrar:

$$\exists\, c \in A \text{ tal que } \int_A f = f(c)\,\text{Vol}\,A$$

Como f é cont. em A e como o bloco A é compacto, então:

$\exists \; f(x_1) = M = \max_{x \in A} f(x)$ e

$\exists \; f(x_0) = m = \min_{x \in A} f(x)$

Então, neste caso, temos

$$f(x_0) \leq \frac{\int_A f}{\text{Vol } A} \leq f(x_1)$$

Pelo T.V.I., $\exists \; c \in A$ tal que

$$f(c) = \frac{\int_A f}{\text{Vol } A},$$

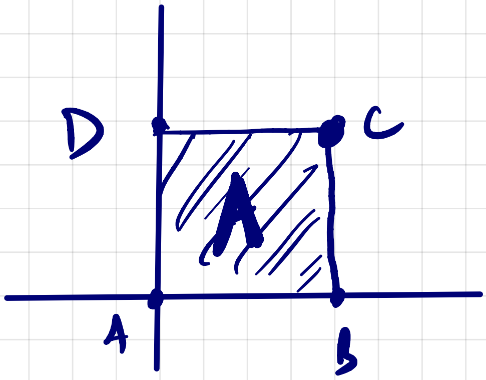
ou seja, $\quad f(c) . \text{Vol } A = \int_A f$. $\square$

---

04)

(a) $\iint_R (x^2+y^2)\,dA$; R é a reg. retangular

$A(0,0)$; $B(1,0)$; $C(1,1)$; $D(0,1)$



bloco A é o quadrado ao lado.

$f(x,y) = x^2 + y^2$ é cont.

$\Rightarrow$ integrável.

$$m = \inf_{x \in A} f(x) = f(0,0) = 0$$

$$M = \sup_{x \in A} f(x) = f(1,1) = 1^2 + 1^2 = 2$$

Então:

$$m \leq \frac{\int_A f}{\text{Vol } A} \leq M \iff 0 \leq \frac{\int_A f}{\text{Vol } A} \leq 2$$

Como Vol A = ÁREA DO QUADRADO

$$\text{Vol}(A) = (1)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{0 \leq \int_A f \leq 2}$$

07) Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos com medida nula; i.e.;

$$\text{med } X_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Define $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$.

Vamos mostrar que $\text{med } X = 0$.

Dado $\varepsilon > 0$.

Dado $k \in \mathbb{N}$ qualquer. Como X_k tem medida nula, segue que $\exists \, (C_{kj})_{j \in \{1,2,\dots\}}$ seq. de blocos abertos tal que

$$X_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_{kj} \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \text{Vol } C_{kj} < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

Então

$$X = \bigcup_n X_n \subset \bigcup_n \left(\bigcup_j C_{kj} \right); \quad (*)$$

ou seja, X está contido numa união enumerável de cubos abertos C_{kj}.

Resta mostrar que:

$$\sum_{(k,j)} \operatorname{vol} C_{kj} < \varepsilon .$$

Seja $F \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Então, $\forall\, k, j$ tais que $k, j \leq l$, temos:

$$\sum_{(k,j)\in F} \operatorname{vol} C_{kj} = \sum_{k=1}^{l} \underbrace{\sum_{j=1}^{l} \operatorname{vol} C_{kj}}_{< \frac{\varepsilon}{2^k}} < \sum_{k=1}^{l} \frac{\varepsilon}{2^k} < \varepsilon \quad (**)$$

De $(*)$ e $(**)$ segue que $\operatorname{med}(X) = 0$.

$\square$

08) Seja $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ integrável e

$f(x) = 0$, exceto em um conj. $X \subset A$ com

$\text{med}\, X = 0$.

Como $\text{med}\, X = 0$, então $A \setminus X$ é denso em A

(o complementar de um conj. de med. nula é denso).

Se $f(x) \geq 0$, $\forall x \in A$, então, $\forall P$ partição de A;

temos que, $\forall B \in P$; (sub bloco da partição)

$$m_B = 0$$ (pois $\forall B \in P$, vai existir $x \in A$ tal que $x \in A \setminus X$, pois $A \setminus X$ é denso em A)

Assim:

$$s(f;P) = \sum_{B \in P} \underbrace{m_B}_{=0} \cdot \text{Vol}\, B = 0, \quad \forall P \text{ - partição de } A.$$

Então,

$$\underline{\int_A} f = 0.$$ Como f é integrável,

$$\int_A f(x)\,dx = \underline{\int_A} f(x)\,dx = 0 \implies \int_A f = 0$$

$\square$

09) Porque a sua fronteira

$$\partial B(a,r) = \{ x \in \mathbb{R}^m : d(x,a) = r \}$$

tem dimensão $m-1$ em $\mathbb{R}^m$, logo

terá medida nula em $\mathbb{R}^m$.