Fundação Universidade Federal de Pelotas
Departamento de Matemática e Estatística
Curso de Lic. em Matemática
Primeira Prova de Cálculo III
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: **Data:** 28/07/2023

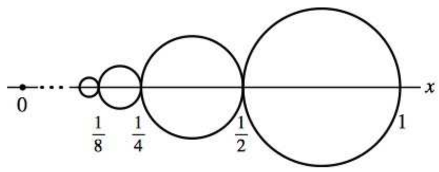
Questão 01. Seja (x_n) a sequência de números reais dada por $x_n = \dfrac{n}{3^{n+1}}$. Prove que (x_n) é convergente de duas formas:

(a) [1,0 pt] Mostrando que (x_n) é monótona e limitada.

(b) [1,0 pt] "Desconfiando" para quanto essa sequência converge, e disso usando a definição de limite de sequência para concluir.

Questão 02. [1,0 pt] Sejam (x_n) uma sequência convergente e (y_n) uma outra sequência tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - y_n| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$. Segue que (y_n) é convergente?

Questão 03. [1,0 pt] Encontre a área total dos infinitos círculos no intervalo $[0, 1]$, conforme o esquema abaixo, justificando que tal soma infinita é convergente.



Questão 04. [0,5 pt cada] Verifique utilizando um método adequado se a série numérica dada em cada item converge ou diverge:

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n! \cdot n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2n+1}}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(\ln n)^2}$

Questão 05. [1,0 pt] Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série de potências:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}(x-2)^n.$$

Questão 06. [1,0 pt] Desenvolva a série de Taylor para $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ no ponto $x = 1$.

Questão 07. Considere a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, onde $|x| < 1$.

(a) [1,0 pt] A partir da série acima, encontre uma representação em séries de potências para $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, apresentando o seu raio de convergência.

(b) [1,0 pt] A partir do item anterior e usando integrais, encontre a representação em séries de potências para $\arctan x$. Qual é o seu raio de convergência?

Questão 08. [1,0 pt] Mostre que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{n!} e^{-x^2} dx = 1$, justificando seus passos.