

Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Cálculo IV - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 03 de Exercícios - Integrais impróprias. Integrais triplas

1. Calcule as integrais impróprias abaixo.

$$(a) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x-y} dx dy \qquad (b) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2-y^2} dx dy$$

$$(c) \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{x^2 dx dy}{(x^2+y^2)^{\frac{7}{4}}} \qquad (d) \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \ln \sqrt{x^2+y^2} dx dy$$

2. Calcule $\iint_{\Omega} e^{\frac{x}{y}} dx dy$, onde $\Omega = \{(x, y) : \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y^2, 0 \leq y \leq 1\}$.

3. Calcule $\iint_{\Omega} e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy$, onde Ω é o triângulo delimitado pelos eixos $x = 0$, $y = 0$ e pela reta $x + y = 1$.

4. Calcule as seguintes integrais triplas:

$$(a) \int_{-3}^3 \int_0^1 \int_1^2 (x + y + z) dx dy dz \qquad (b) \int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^y 2xyz dz dy dx$$

$$(c) \int_0^3 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} ze^y dx dz dy \qquad (d) \int_0^1 \int_0^z \int_0^y ze^{-y^2} dx dy dz$$

5. Calcule $\iiint_{\Omega} y dV$, onde Ω é limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $2x + 2y + z = 4$.

6. Em cada item a seguir, calcule a integral da função dada sobre o domínio D dado. Sempre que possível, faça um esboço do domínio D .

- (a) $f(x, y, z) = xy^2z^3$ e $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$.
- (b) $f(x, y, z) = z$ e D é o tetraedro delimitado pelos planos coordenados e pelo plano $x + y + z = 1$.
- (c) $f(x, y, z) = z$ e D é o tetraedro delimitado pelos planos coordenados e pelo plano $x - y - z = 1$.

7. Use integral tripla para determinar o volume do sólido limitado pelo cilindro $y = x^2$ e pelos planos $z = 0$ e $y + z = 1$.

8. Use integral tripla para calcular $\iiint_{\Omega} x dV$, onde Ω é o tetraedro limitado pelos planos $x + 2y + 3z = 6$, $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$.

9. Escreva as outras cinco integrais iteradas que sejam iguais a cada integral iterada dada:

$$(a) \int_0^1 \int_y^1 \int_0^y f(x, y, z) dz dx dy \qquad (b) \int_0^1 \int_y^1 \int_0^z f(x, y, z) dz dy dx$$

10. Use integral tripla para determinar o volume do sólido dado em cada item.

- (a) O sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 9$ e pelos planos $y + z = 5$ e $z = 1$.
 (Resp.: 36π u.v.)

(b) O sólido limitado pela superfície $y = x^2$ e os planos $y + z = 4$ e $z = 0$.
(Resp.: $\frac{256}{15}$ u.v.)

11. Ache o volume do sólido acima do parabolóide elíptico $3x^2 + y^2 = z$ e abaixo do cilindro $x^2 + z = 4$.
(Resp.: 4π u.v.)

12. Calcule $\iiint_S (xz + 3z)dV$, onde S é a região limitada pelo cilindro $x^2 + z^2 = 9$ e pelos planos $x + y = 3$, $z = 0$, $y = 0$ e acima do plano xy .
(Resp.: $\frac{648}{5}$)

13. Calcule $\iiint_{\Omega} x^2 e^y dV$, onde Ω é limitado pelo cilindro parabólico $z = 1 - y^2$ e pelos planos $x = z$, $x = 1$ e $x = -1$.
(Resp.: $\frac{8}{3e}$)

14. Dada a região Ω : $0 \leq x - y + 2z \leq 1$, $1 \leq x + y - 2z \leq 2$ e $0 \leq z \leq 1$, calcule

$$\iiint_{\Omega} \frac{x - y + 2z}{x + y - 2z} dx dy dz.$$

(Resp.: $\frac{1}{4} \ln 2$)

15. Seja R a região do espaço dada por R : $0 \leq x - y + z \leq 1$, $1 \leq x + y - z \leq 2$ e $0 \leq z \leq 1$, calcule

$$\iiint_R \frac{e^{x-y+z}}{x + y - z} dx dy dz.$$

(Resp.: $(e - 1) \ln 2$)

16. Use a transformação $u = x$, $v = z - y$, $w = xy$ para calcular $\iiint_{\Omega} (z - y)^2 xy dV$, onde Ω é a região compreendida pelas superfícies $x = 1$, $x = 3$, $z = y$, $z = y + 1$, $xy = 2$ e $xy = 4$.
(Resp.: $2 \ln 3$)

17. Determine o volume da região interior ao elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
(Resp.: $\frac{4\pi}{3}$ u.v.)