Fundação Universidade Federal de Pelotas
Departamento de Matemática e Estatística
Primeira Prova de Geometria Analítica[1]
Cursos de Matemática, Física e Química
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: GABARITO. **Data:** 27/07/2023.

Questão 01. [Peso 1] O que é vetor?

Questão 02. Sejam os pontos $A(-2,1)$, $B(3,2)$ e $C(1,4)$ do $\mathbb{R}^2$.

(a) [Peso 1] Determine $\text{proj}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}$.

(b) [Peso 2] Obtenha a equação da reta (r) que passa pelos pontos A e B. Em seguida, encontre a equação da reta perpendicular à reta (r), passando pelo ponto C.

(c) [Peso 2] Obtenha a equação da circunferência determinada pelos pontos A, B e C.

Questão 03. Considere o lugar geométrico dado pela equação

$$(\gamma): \; x^2 + 4y^2 - 2x - 3 = 0$$

(a) [Peso 2] Identifique o lugar geométrico, determinando vértices, focos e centro, fazendo também um esboço gráfico de (γ).

(b) [Peso 2] Esboce no mesmo plano cartesiano o gráfico da parábola (δ) de equação

$$(\delta): \; x = y^2,$$

identificando foco, vértice e reta diretriz. Em seguida, determine os pontos de interseção entre (γ) e (δ).

(c) [Peso 1] Chamando de A e B os pontos de interseção obtidos no item anterior, determine a medida do ângulo θ formado pelos vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

Questão 04. [Peso 2] Mediante rotações e translações de eixos, esboce o gráfico da cônica de equação

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 + 20x + 20y + 44 = 0,$$

identificando-a[2].

Questão 05. [Peso 2] Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ do $\mathbb{R}^2$, tais que $||\vec{u}|| = 3$, $||\vec{v}|| = 2$ e o ângulo entre eles sendo de $120°$, determine o produto escalar entre os vetores $2\vec{u} - \vec{v}$ e $\vec{u} - 4\vec{v}$.

---

[1] A nota N será definida pela fórmula $N = \frac{\sum \text{pesos} \times 10}{13}$

[2] Para ajudar, as fórmulas usuais são:

$$\cot 2\alpha = \frac{A-C}{B}; \quad 1 + \tan^2 2\alpha = \sec^2 2\alpha; \quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}; \quad \text{sen}\,\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}};$$

$$\begin{cases} x = \tilde{x}\cos\alpha - \tilde{y}\,\text{sen}\,\alpha \\ y = \tilde{x}\,\text{sen}\,\alpha + \tilde{y}\cos\alpha \end{cases}$$

01) Dado um segmento orientado AB, chama-se VETOR $\overrightarrow{AB}$ o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a AB. Mais precisamente:

$$\overrightarrow{AB} := \{XY : XY \sim AB\}.$$

1.0

Observe que dois segmentos orientados são ditos equipolentes quando possuírem mesmos MÓDULO, DIREÇÃO e SENTIDO.

obs.: posso aceitar outras formas de definir vetor, desde que certas.

---

02) $A(-2,1)$; $B(3,2)$; $C(1,4)$

a) $\text{proj}_{\overrightarrow{AC}} \overrightarrow{AB} = ?$

$$\text{proj}_{\overrightarrow{AC}} \overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AC}\|^2} \cdot \overrightarrow{AC} \quad ; \quad \text{onde:}$$

1.0

$\overrightarrow{AB} = B - A = (3,2) - (-2,1) = (5,1)$ 0,2

$\overrightarrow{AC} = C - A = (1,4) - (-2,1) = (3,3)$ 0,2

Assim:

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (5,1) \cdot (3,3) = 15 + 3 = 18$ 0,3

$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(3)^2 + (3)^2} = \sqrt{18}$ 0,2

$\text{proj}_{\overrightarrow{AC}} \overrightarrow{AB} = \frac{18}{(\sqrt{18})^2} (3,3) = (3,3)$ 0,1

b) Seja (r) a reta que passa por $A(-2,1)$ e $B(3,2)$

Então, sua eq. será:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} x & y \\ -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{matrix} = 0$$

1.0

$$\Leftrightarrow x + 3y - 4 - 3 - 2x + 2y = 0$$

$\boxed{(r): x - 5y + 7 = 0}$ ou: $\boxed{(r): y = \frac{1}{5}x + \frac{7}{5}}$

2,0

$$m_r = \frac{1}{5}$$

Seja (s) a reta que passa por $C(1,4)$ e é perpendicular à (r). Logo, $m_s = -\frac{1}{m_r} = -5$, e disso:

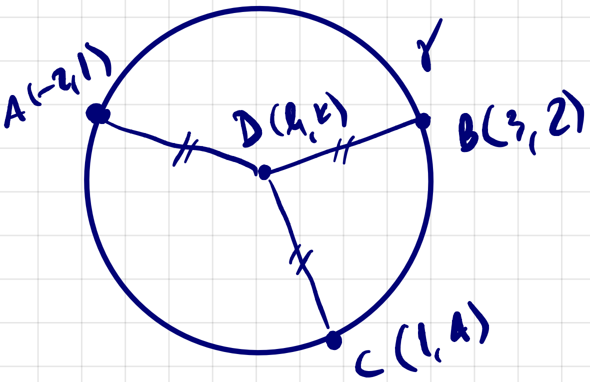
$$(s): y - y_C = m_s(x - x_C)$$

1.0

$$y - 4 = -5(x - 1)$$

$$(s): \boxed{y = -5x + 9}$$

c) Seja γ a circunferência procurada.



Seja $D(h,k)$ o centro de γ.

Então: $d_{AD} = d_{BD} = d_{CD} = R$

- $d_{AD} = d_{BD}$:

$$\sqrt{(h+2)^2+(k-1)^2} = \sqrt{(h-3)^2+(k-2)^2}$$

$$\cancel{h^2} + 4h + \cancel{4} + \cancel{k^2} - 2k + 1 = \cancel{h^2} - 6h + 9 + \cancel{k^2} - 4k + \cancel{4}$$

$$10h + 2k = 8 \quad \div 2$$

$$\boxed{5h + k = 4} \quad (*)$$

0,5

- $d_{AD} = d_{CD}$:

$$\sqrt{(h+2)^2+(k-1)^2} = \sqrt{(h-1)^2+(k-4)^2}$$

$$\cancel{h^2} + 4h + 4 + \cancel{k^2} - 2k + \cancel{1} = \cancel{h^2} - 2h + \cancel{1} + \cancel{k^2} - 8k + 16$$

$$6h + 6k = 12 \quad \div 6$$

$$\boxed{h + k = 2} \quad (**)$$

0,5

De $(*)$ e $(**)$ vem:

$$\begin{cases} h + k = 2 \\ 5h + k = 4 \end{cases} \qquad h = 2 - k$$

$$\Downarrow$$

$$5 \cdot (2-k) + k = 4$$

$$10 - 5k + k = 4$$

$$-4k = -6 \Rightarrow k = \frac{3}{2}$$

$$h = 2 - k$$

$$h = 2 - \frac{3}{2}$$

$$h = \frac{1}{2}$$

0,5

2,0

Logo, o centro D terá coordenadas: $C\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Como $R = d_{AD}$ (por exemplo), então:

$$R = \sqrt{\left(\frac{1}{2}+2\right)^2 + \left(\frac{3}{2}-1\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{26}{4}} = \sqrt{\frac{13}{2}}$$

Com isso, a eq. da circunf. (γ) será:

$(\gamma): (x-h)^2+(y-k)^2=R^2$

$(\gamma): \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{13}{2}}\right)^2$ 0,5

$$\boxed{(\gamma): \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{13}{2}}$$

03) $\gamma: x^2+4y^2-2x-3=0$

a) $x^2-2x+4y^2=3$

$(x-1)^2-1+4y^2=3$

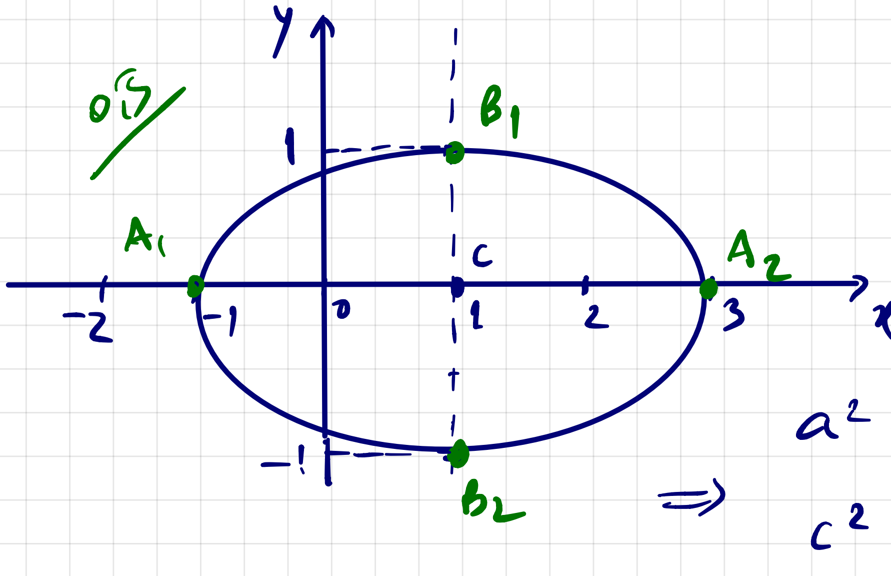
$(x-1)^2+4y^2=4$

$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ (elipse) 0,5

centro $C(1,0)$ 0,2

$a^2=4 \Rightarrow a=\pm 2$

$b^2=1 \Rightarrow b=\pm 1$



Pela construção gráfica obtemos os vértices

$A_1(-1,0)$; $A_2(3,0)$ 0,5

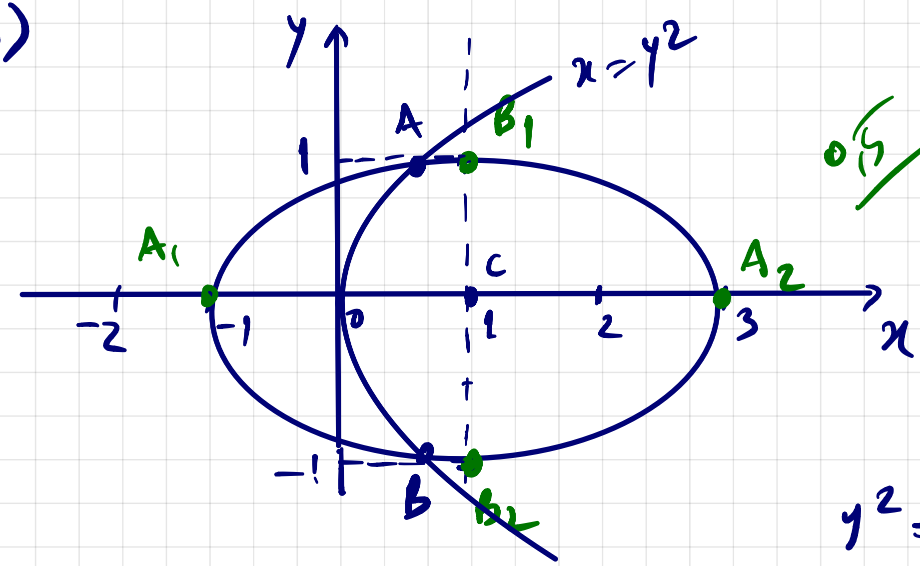
$B_1=(1,1)$; $B_2(1,-1)$

$a^2=b^2+c^2$

$\Rightarrow$ $c^2=a^2-b^2$

$c^2=\sqrt{4-1}=\pm\sqrt{3}$

Focos: $F_1(-\sqrt{3},0)$; $F_2(\sqrt{3},0)$ 0,3 b)



0,5

$y^2 = 1 \cdot x$

$y^2 = 2px$ (forma clássica)

$2p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{2}$ 0,1

É parábola centrada na origem (0,0), i.e, vértice $V(0,0)$, com reta diretriz (d) : $x = \frac{p}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$ 0,1

0,1 e foco $F\left(\frac{p}{2}, 0\right) \Rightarrow F\left(\frac{1}{4}, 0\right)$

0,1 0,1

INTERSEÇÃO :
$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 2x - 3 = 0 \\ x = y^2 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$y^4 + 4y^2 - 2y^2 - 3 = 0$$

0,5

$$y^4 + 2y^2 - 3 = 0$$

$$y^2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2}$$

$\nearrow$ $y^2 = \frac{-2+4}{2} = 1$

$\searrow$ $y^2 = \frac{-2-4}{2} \notin \mathbb{R}$

$$\Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1.$$

$$y = 1 \rightsquigarrow x = 1^2 = 1$$

$$y = -1 \rightsquigarrow x = 1^2 = 1$$

0,5

$A(1,1)$; $B(1,-1)$ → PONTOS DE INTERSEÇÃO ENTRE (γ) e (δ).

c) $\vec{OA} = A - O = (1,1) - (0,0) = (1,1)$ 0,2

$\vec{OB} = B - O = (1,-1) - (0,0) = (1,-1)$ 0,2

$$\cos\theta = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{\|\vec{OA}\| \cdot \|\vec{OB}\|} \; ; \text{ onde:}$$

1.0

$\|\vec{OA}\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ 0,2

$\|\vec{OB}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ 0,2

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = (1,1) \cdot (1,-1) = 1 + (-1) = 0$$

$$\rightarrow \cos\theta = \frac{0}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \boxed{\theta = 90^\circ}$$

0,2

04) $5x^2+4xy+2y^2+20x+20y+44=0$

$$\cot 2\theta = \frac{A-C}{B} = \frac{5-2}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \tan 2\theta = \frac{4}{3} > 0. \qquad \Rightarrow 2\theta \in 1^o q \Rightarrow \theta \in 1^o q$$

$$1+\tan^2 2\theta = \sec^2 2\theta$$

$$1+\frac{16}{9} = \sec^2 2\theta \Rightarrow \sec 2\theta = +\sqrt{\frac{25}{9}} \Rightarrow \sec 2\theta = \frac{5}{3}$$

Assim, teremos:

$$\cos 2\theta = \frac{1}{\sec 2\theta} = \frac{3}{5}.$$, e disso, obtemos:

0,3

2,0

- $\cos\theta = +\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{8}{5}\times\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$
- $\operatorname{sen}\theta = +\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$

Logo, determinamos:

$$x = \bar{x}\cos\theta - \bar{y}\operatorname{sen}\theta \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{5}}.\bar{x} - \frac{1}{\sqrt{5}}\bar{y} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\bar{x}-\bar{y})}$$ 0,1

$$y = \bar{x}.\operatorname{sen}\theta + \bar{y}\cos\theta \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{5}}\bar{x} + \frac{2}{\sqrt{5}}\bar{y} \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{\sqrt{5}}.(\bar{x}+2\bar{y})}$$ 0,1

Levando para a eq. da cônica dada, vamos obter:

$$5x^2+4xy+2y^2+20x+20y+44=0$$

$$5.\left[\frac{1}{\sqrt{5}}(2\bar{x}-\bar{y})\right]^2 + 4.\frac{1}{\sqrt{5}}(2\bar{x}-\bar{y}).\frac{1}{\sqrt{5}}(\bar{x}+2\bar{y}) + 2.\left[\frac{1}{\sqrt{5}}(\bar{x}+2\bar{y})\right]^2 +$$

$$+20.\frac{1}{\sqrt{5}}(2\bar{x}-\bar{y}) + 20.\frac{1}{\sqrt{5}}(\bar{x}+2\bar{y}) + 44 = 0$$

$$\cancel{5}\cdot\frac{1}{\cancel{5}}\cdot\left(4\bar{x}^2-4\bar{x}\bar{y}+\bar{y}^2\right)+\frac{4}{5}\cdot\left(2\bar{x}^2+\underbrace{4\bar{x}\bar{y}-\bar{x}\bar{y}}_{3\bar{x}\bar{y}}-2\bar{y}^2\right)+$$

$$+\frac{2}{5}\cdot\left(\bar{x}^2+4\bar{x}\bar{y}+4\bar{y}^2\right)+\frac{40}{\sqrt{5}}\bar{x}-\frac{20}{\sqrt{5}}\bar{y}+\frac{20}{\sqrt{5}}\bar{x}+$$

$$+\frac{40}{\sqrt{5}}\bar{y}+44=0 \qquad (\times 5)$$

$$20\bar{x}^2-\cancel{20\bar{x}\bar{y}}+5\bar{y}^2+8\bar{x}^2+\cancel{12\bar{x}\bar{y}}-\cancel{8\bar{y}^2}+2\bar{x}^2+\cancel{8\bar{x}\bar{y}}+$$

$$+\cancel{8\bar{y}^2}+\frac{200}{\sqrt{5}}\bar{x}-\frac{100}{\sqrt{5}}\bar{y}+\frac{100}{\sqrt{5}}\bar{x}+\frac{200}{\sqrt{5}}\bar{y}+220=0$$

$$30\bar{x}^2+5\bar{y}^2+\frac{300}{\sqrt{5}}\bar{x}+\frac{100}{\sqrt{5}}\bar{y}+220=0 \qquad (\div 5)$$

$$6\bar{x}^2+\bar{y}^2+\frac{60}{\sqrt{5}}\bar{x}+\frac{20}{\sqrt{5}}\bar{y}+44=0 \quad \leftarrow$$

ATÉ AQUI: 0,5

$$6\bar{x}^2+\frac{60}{\sqrt{5}}\bar{x}+\bar{y}^2+\frac{20}{\sqrt{5}}\bar{y}+44=0$$

$$6\left(\bar{x}^2+\frac{10}{\sqrt{5}}\bar{x}\right)+\underbrace{\left(\bar{y}+\frac{10}{\sqrt{5}}\right)^2}_{\bar{y}^2+\frac{20}{\sqrt{5}}\bar{y}+\frac{100}{5}}-\frac{100}{5}+44=0$$

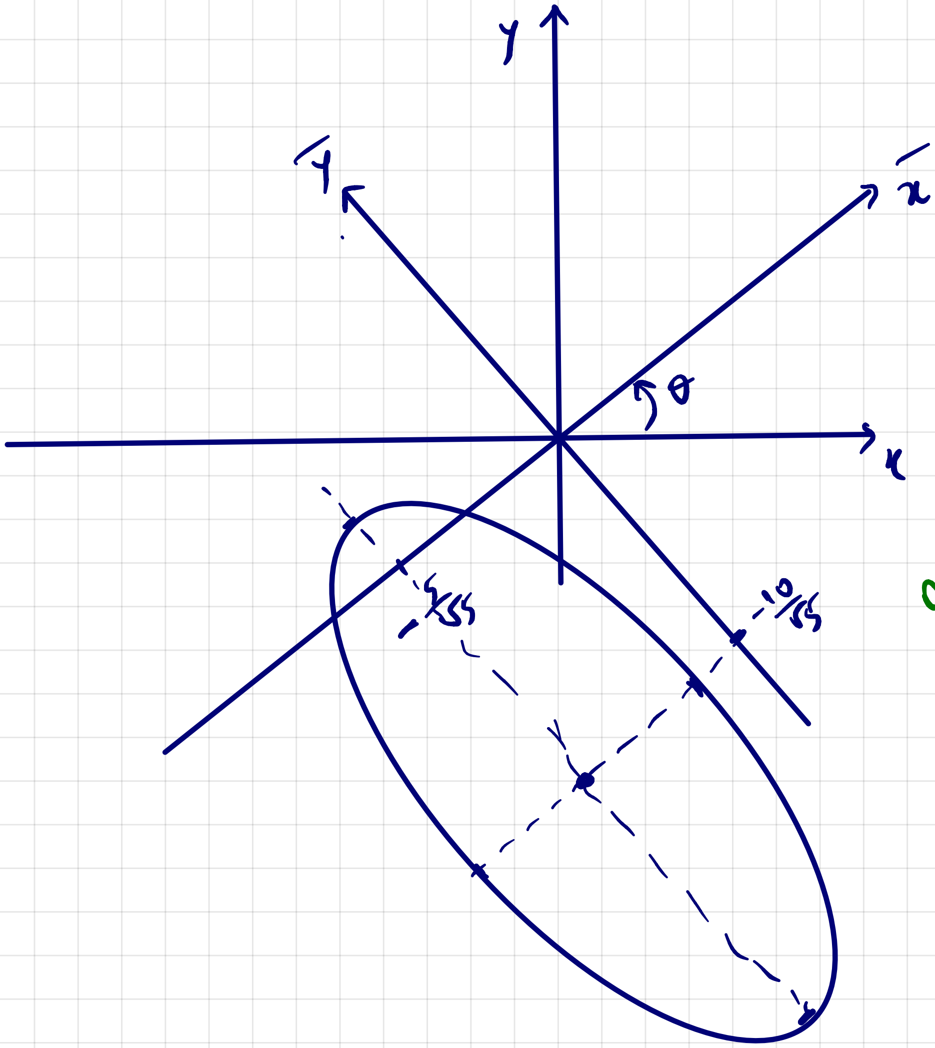
$$6\left[\underbrace{\left(\bar{x}+\frac{5}{\sqrt{5}}\right)^2}_{\bar{x}^2+\frac{10}{\sqrt{5}}\bar{x}+\frac{100}{5}}-\frac{100}{5}\right]+\left(\bar{y}+\frac{10}{\sqrt{5}}\right)^2-20+44=0$$

$$6.\ \left(\bar{x} + \frac{5}{\sqrt{5}}\right)^2 - 120 + \left(\bar{y} + \frac{10}{\sqrt{5}}\right)^2 + 24 = 0$$

$$6\left(\bar{x} + \frac{5}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\bar{y} + \frac{10}{\sqrt{5}}\right)^2 = 96 \qquad (\div 96)$$

+0,5

$$\frac{\left(\bar{x} + \frac{5}{\sqrt{5}}\right)^2}{16} + \frac{\left(\bar{y} + \frac{10}{\sqrt{5}}\right)^2}{96} = 1 \qquad [\text{ELIPSE}]$$



0,5

05) Temos: $\|\vec{u}\|=3$; $\|\vec{v}\|=2$; $\theta=120^\circ$

Vamos determinar

2,0

$$(2\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-4\vec{v}).$$ De fato;

por propriedades, temos:

$$(2\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-4\vec{v}) = 2\underbrace{\vec{u}\cdot\vec{u}}_{\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2} - 8\,\vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{v}\cdot\vec{u} + 4\underbrace{\vec{v}\cdot\vec{v}}_{=\|\vec{v}\|^2}$$

0,5

$$= 2\cdot\|\vec{u}\|^2 - 9\cdot\vec{u}\cdot\vec{v} + 4\cdot\|\vec{v}\|^2 ;$$ 0,5

e como

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos 120^\circ$$

$$= 3\cdot 2\cdot\cos 120^\circ = 3\cdot\cancel{2}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right) = -3 ;$$ 0,5

segue que

$$(2\vec{u}-v)\cdot(\vec{u}-4\vec{v}) = 2\cdot\|\vec{u}\|^2 - 9\cdot\vec{u}\cdot\vec{v} + 4\cdot\|\vec{v}\|^2$$

$$= 2\cdot(3)^2 - 9\cdot(-3) + 4\cdot(2)^2$$

$$= 18 + 27 + 16 = 61$$ 0,5

$\square$