12/07/23 – AULA 09

Do exercício da aula passada:

(c) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{\sqrt{n}} \cdot x^{n-1}.$$

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-3)^{n-1}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{(-3)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{(-3)^n} \cdot (-3)^{-1} \sqrt{n+1}}{\sqrt{n} \cdot \cancel{(-3)^n}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| -\frac{1}{3} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{n+1}{n}}}_{\to 1} \right| = \frac{1}{3} \implies \boxed{R = \frac{1}{3}}$$

intervalo de convergência: $|x| < \frac{1}{3}$

$$\iff -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3};$$

i.e., obtemos o intervalo de convergência $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Resta verificar nas extremidades:

1º: $x = -\frac{1}{3}$: obtemos a série numérica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{\sqrt{n}} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{(-3)^n} \cdot (-1)^n}{\sqrt{n} \cdot \cancel{(-3)^n}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$ (SÉRIE ALTERNADA)

Pelo teste de Leibniz: $\left(\sum (-1)^n \cdot a_n \right)$

Sendo $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, temos

- $a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} = a_n$, $\forall n$

$\Rightarrow (a_n)$ é decrescente.

- $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Logo, pelo teste de Leibniz segue que a série numérica obtida é convergente.

2º: $x = \frac{1}{3}$: obtemos a série numérica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n \cdot (-1)^n}{\sqrt{n} \cdot 3^n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \cancel{3^n} \cdot (-1)^n}{\sqrt{n} \cdot \cancel{3^n}}$$ $(-1)^{2n} = 1$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$, que é

uma série hiperharmônica $\sum \frac{1}{n^p}$, com $p = \frac{1}{2} < 1$. Logo, segue a série diverge em $x = \frac{1}{3}$.

<u>conclusão</u>: o intervalo de convergência será $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

<u>TEOREMA</u>: Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ uma série de potências. Se esta série convergir em algum $x = x_1$, então a série converge absolutamente, $\forall x$ tal que $|x| < |x_1|$.

<u>DEMONSTR.</u>: Seja $x_1 \in \mathbb{R}$ tal que a série numérica obtida $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x_1^n$ seja convergente.

Logo, $\lim_{n\to\infty} a_n x_1^n = 0$. Então, $\forall\, 0 < \varepsilon < 1$ (e ainda, poderíamos tomar $\varepsilon = 1$, mas não maior que 1); $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n x_1^n - 0| < \varepsilon ;$$

ou seja, $|a_n \cdot x_1^n| < \varepsilon < 1, \ \forall n \geq n_0$.

Então, $\forall x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| < |x_1|$, temos:

$$|a_n \cdot x^n| = \left| a_n x_1^n \cdot \frac{x^n}{x_1^n} \right| = |a_n \cdot x_1^n| \cdot \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$$

Como $|a_n \cdot x_1^n| < \varepsilon < 1$, então

$$|a_n \cdot x^n| = \underbrace{|a_n \cdot x_1^n|}_{<1} \cdot \left| \frac{x}{x_1} \right|^n < 1 \cdot \left| \frac{x}{x_1} \right|^n,$$

i.e., $\boxed{|a_n \cdot x^n| < \left| \frac{x}{x_1} \right|^n, \ \forall n \geq n_0.}$ (*)

Como $\sum \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$ é série geométrica com

$$q = \left| \frac{x}{x_1} \right| < 1,$$

pois $|x| < |x_1|$

segue que esta é convergente.

Assim, pelo teste de comparação, observando que $\sum \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$ é convergente, de (*) segue que $\sum |a_n x^n|$ converge, ou seja, a série $\sum a_n x^n$ converge absolutamente. □

COROLÁRIO: Seja $\sum a_n x^n$ série de potências. Se $\exists\ x_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\sum a_n x_1^n$ diverge, então a série $\sum a_n x^n$ diverge $\forall\ x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| > |x_1|$.

REPRESENTAÇÃO DE FUNÇÕES EM SÉRIES DE POTÊNCIAS:

A série geométrica é fundamental pois através dela podemos obter a representação em série para outras funções.

Antes, porém, verifiquemos o seu raio de convergência.

Dada $\sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot x^n$, temos que

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = 1. \qquad a_n = 1,\ \forall n$$

Então, $\forall x$: $|x| < 1$, a série converge,

e converge para $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. $\left(\frac{a_1}{1-q} \right)$

Vejamos outras funções que usam a série geométrica para serem expandidas em séries de potências.

01) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ • Qual sua representação em série de potências?

• Qual o seu raio de convergência?

SOLUÇÃO:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n$$

$$\boxed{R = 1}$$

02) $f(x) = \dfrac{1}{2+3x}$ (idem).

SOLUÇÃO:

$$f(x) = \frac{1}{2+3x} = \frac{1}{2\left(1+\frac{3}{2}x\right)} = \frac{1}{2\cdot\left(1-\left(-\frac{3}{2}x\right)\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{-3x}{2}\right)} = \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-3x}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3^n\cdot x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3^n}{2^{n+1}}\cdot x^n$$

$R = ?$

Olhando: $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-3x}{2}\right)^n$, então:

$$\left|\frac{-3x}{2}\right| < 1 \iff |x| < \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{R = \frac{2}{3}}$$

Outra forma de determinar o raio de convergência seria:

$$\underset{\sim}{R} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n \cdot 3^n}{2^{n+1}} \times \frac{2^{n+2}}{(-1)^{n+1} \cdot 3^{n+1}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cancel{(-1)^n} \cdot \cancel{3^n} \cdot \cancel{2^n} \cdot 2^2}{\cancel{2^n} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{(-1)^n} \cdot (-1) \cdot \cancel{3^n} \cdot 3}\right| = \underset{\sim}{\frac{2}{3}}$$

TEOREMA: (DERIVAÇÃO E INTEGRAÇÃO DE SÉRIES DE POTÊNCIAS)

Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n . x^n$ série de potência com um raio de convergência $R>0$. i

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots$$

Então a série pode ser derivada termo a termo, i.e.;

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n . a_n x^{n-1} =$$

$$= a_1 + 2a_2 x + 3.a_3 x^2 + 4 a_4 x^3 + \cdots,$$

que será convergente com raio de convergência R.

Além disso, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pode ser integrada termo a termo, ou seja,

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n . \int_0^x t^n . dt,$$

com raio de convergência também $R>0$.

Resumindo: uma série de potências pode ser derivada termo a termo ou integrada termo a termo, mantendo o mesmo raio de convergência da série original.

DEMONSTR: Ver livro do LEITHOLD, vol 2.

$\square$

EXEMPLOS:

01) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$. Qual série pode representar f?

SOLUÇÃO: O $(1-x)^2$ do denominador "motiva" pensar em derivação de $(1-x)^{-1}$. De fato:

$$\Big(\underbrace{(1-x)^{-1}}_{\text{SÉRIE GEOMÉTRICA.}}\Big)' = -1 \cdot (1-x)^{-2} = \frac{-1}{(1-x)^2}$$

Logo:

$$-\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)'$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n\, x^{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = -\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^{n-1}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = -x^{-1} - 2x - 3x^2 - 4x^3 - \cdots$$

$$= -\frac{1}{x} - 2x - 3x^2 - 4x^3 - \cdots$$

$R = ?$ $R = 1$, i.e., $|x| < 1$.

02) $f(x) = \ln(1+x)$. Série para f e seu raio de convergência?

SOLUÇÃO:

Lembrando que

$$\int \frac{dx}{1+x} = \ln|1+x| + C,$$

então a "saída" para representar $f(x)$ como uma série de potências será integrando $\frac{1}{1+x}$.

Note que:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n,$$

onde $R = 1$.

Disso:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \frac{1}{1+t} \cdot dt =$$

$$= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot t^n \cdot dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \int_0^x t^n \cdot dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^{n+1}}{n+1} \Bigg|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - 0 \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \cdot \frac{x^m}{m}$$

$n+1 = m$

$n = 0 \Rightarrow m = 1$

conclusão:

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \; ; \quad R = 1}$$

03) $f(x) = \arctan x$.

Uma série para f e seu raio de convergência?

solução: Lembre que

$$\arctan x = \int \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

Ou seja, para obter uma representação em série para $\arctan x$, precisaremos integrar a representação em série de $\frac{1}{1+x^2}$. (pense na série geométrica)

1.º: representar a série para $\frac{1}{1+x^2}$:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-\underbrace{(-x^2)}_{q}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n}$$

$$R = |-x^2| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$$

Assim:

$$\operatorname{arctan} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt =$$

$$= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot t^{2n} \cdot dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \int_0^x t^{2n}\, dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right)\Bigg|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{2n+1} ;$$

com $R = 1$.

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{arctan} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{2n+1} \quad ; \quad R = 1}$$

LISTA 03, QUESTÃO 05-h:

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2}$$

$$\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2-x} = -\frac{1}{2\left(1-\frac{x}{2}\right)} = -\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{1}{1-\frac{x}{2}}}_{\text{SÉRIE GEOM.}}$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n} =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}} \qquad R = ?$$

$$\left|\frac{x}{2}\right| < 1.$$

$$\Rightarrow |x| < 2$$

$$\Rightarrow \boxed{R = 2}$$

Derivando, obtemos:

$$\frac{1}{(x-2)^2} = \left(\frac{1}{x-2}\right)' = \left(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}\right)'$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\,x^{n-1}}{2^{n+1}} \quad ; \; R = 2.$$

Portanto, teremos:

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2} = x^3\cdot\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\,x^{n-1}}{2^{n+1}}\right) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\cdot x^{n+2}}{2^{n+1}} \quad ;$$

$$R = 2$$