07/07/23 - AULA 08

SEQUÊNCIA DE FUNÇÃO.

Def.: Chama-se SEQUÊNCIA DE FUNÇÕES a lista infinita de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$

$$(f_n) = (f_1, f_2, f_3, \ldots),$$

onde $f_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $\forall i \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Note que fixado $x_0 \in X$,

$$f_n(x_0) = (f_1(x_0), f_2(x_0), \ldots)$$

torna-se uma sequência numérica.

Ex.: $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$.

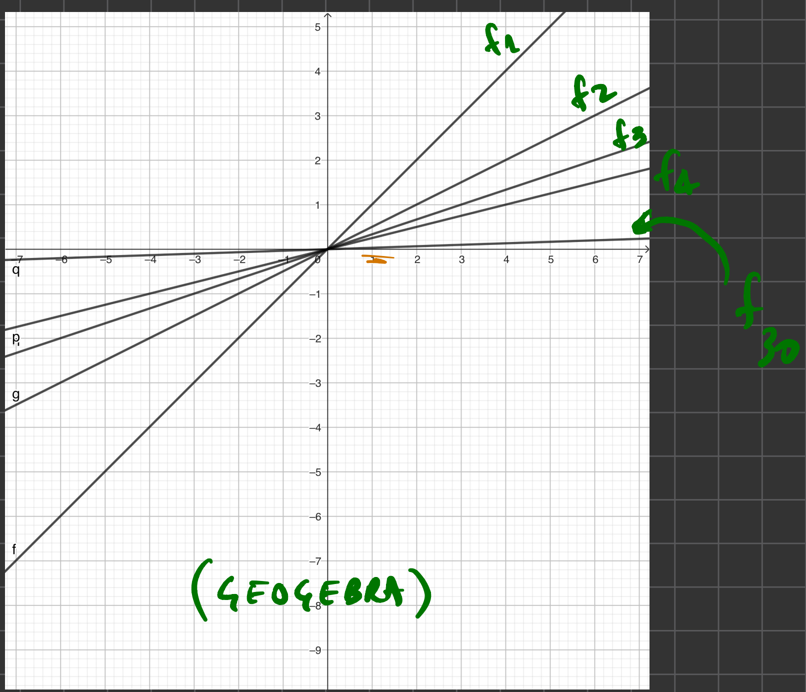
Neste caso, temos:

$f_1(x) = x$

$f_2(x) = \dfrac{x}{2}$

$f_3(x) = \dfrac{x}{3}$

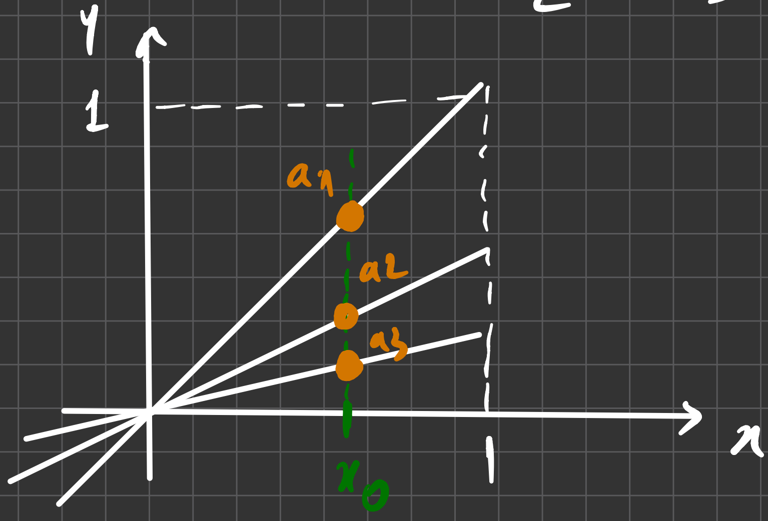
$\vdots$



Note que, fixado $x_0 \in [0,1]$; $f_n(x_0)$ é:

$$f_n(x_0) = \left(f_1(x_0),\ f_2(x_0),\ f_3(x_0),\ \dots\right)$$

$$= \left(\underbrace{x_0}_{a_1},\ \underbrace{\frac{x_0}{2}}_{a_2},\ \underbrace{\frac{x_0}{3}}_{a_3},\ \underbrace{\frac{x_0}{4}}_{a_4},\ \dots\right)$$



Observando o que se discutiu acima, podemos definir o conceito de limite de sequência de funções:

Def: Sejam $f_n : X \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é o limite de f_n quando n tende ao infinito, e escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$ se, e somente se,

$$\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que: }$$
$$\forall n \geq n_0 \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Neste caso, dizemos que a sequência f_n <u>converge simplesmente</u> para f, e escrevemos $f_n \to f$.

No exemplo acima, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{n}$, percebemos que $f_n \to f(x) \equiv 0$ (FUNÇÃO IDENTICAMENTE NULA)

De fato, Dado $x \in [0,1]$.

Dado $\varepsilon > 0$.

Precisamos achar $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - 0| < \varepsilon$.

$$|f_n(x) - 0| = \left|\frac{x}{n} - 0\right| = \frac{|x|}{n} = \frac{x}{n}$$

$x \in [0,1]$

Basta tomar $\varepsilon > \frac{x+1}{n_0}$

Assim, $\forall n \geq n_0$, teremos $\frac{n}{x+1} \geq \frac{n_0}{x+1}$.

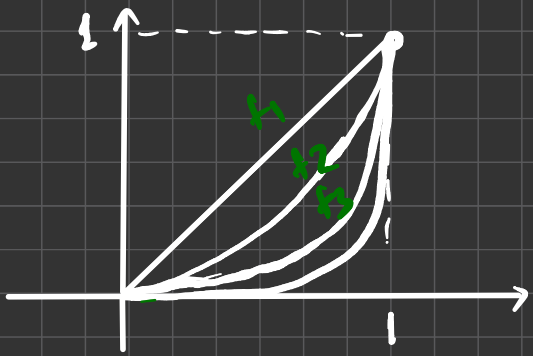
Disso, teremos:

$$\underset{\sim}{|f_n(x) - 0|} = \frac{x}{n} < \frac{x+1}{n} \leq \frac{x+1}{n_0} < \underset{\sim}{\varepsilon}.$$

$$\frac{x+1}{n} \leq \frac{x+1}{n_0} < \varepsilon$$

Então tome $\boxed{n_0 > \frac{x+1}{\varepsilon}}$

02) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$.



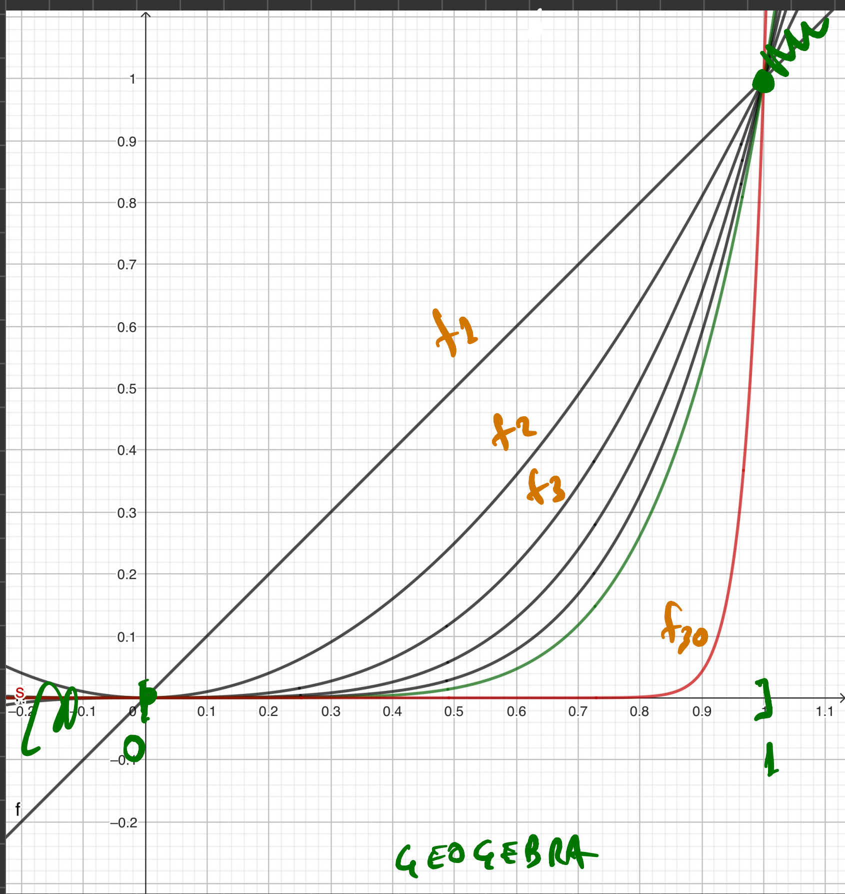
ENTÃO:

$f_1(x) = x$

$f_2(x) = x^2$

$f_3(x) = x^3$

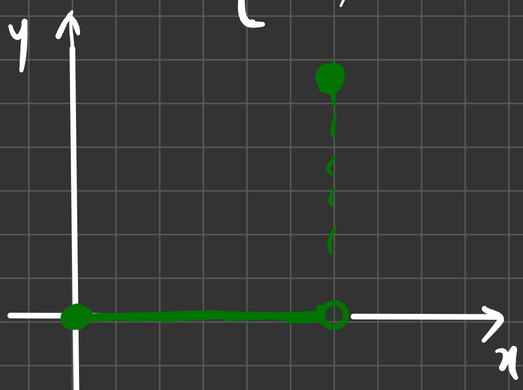
⋮



Note que as f_n estão convergindo para

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [0,1) \\ 1, & \text{se } x = 1. \end{cases}$$



Obs.: Se $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$,

dizemos que $f(x)$ é a FUNÇÃO LIMITE.

SÉRIE DE FUNÇÕES:

Dada $f_n : X \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções, definimos por série de funções a soma $f_1 + f_2 + f_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$

Ou seja, $\forall x \in X$, montamos a sequência $s_n(x)$ das somas parciais, como segue:

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$$

Fixado $x_0 \in X$, então

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ é uma série numérica.

Dizemos que a série $\sum f_n(x)$ converge se a sequência $s_n(x)$ convergir. (convergência pontual)

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} s_n(x).$$

Naturalmente há séries de funções bem gerais, como por exemplo (*):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{e^{nx^2}} = \frac{\cos x}{e^{x^2}} + \frac{\cos 2x}{e^{2x^2}} + \frac{\cos 3x}{e^{3x^2}} + \cdots$$

No entanto, nosso objetivo é estudar um tipo de série mais simples (porém importante), chamada de SÉRIE DE POTÊNCIAS.

Def.: Chama-se SÉRIE DE POTÊNCIAS a série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

Note que, fixado $x_0 \in \mathbb{R}$, tal série se torna uma série numérica.

Como tal série depende de $x \in \mathbb{R}$, devemos perguntar: para quais valores de x tal série converge?

Admita que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ seja convergente.

Então, pelo teste da razão, teremos:

(*) Estes tipos de séries de funções são estudados na disciplina de SEQUÊNCIAS E SÉRIES.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}\,x^{n+1}}{a_n\,x^n}\right| < 1$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}\cdot \cancel{x^n}\cdot x}{a_n\cdot \cancel{x^n}}\right| < 1$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x| < 1 \Longleftrightarrow |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

$$\Longleftrightarrow |x| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$

Ou seja $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge se, e só se,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}\,x^{n+1}}{a_n\,x^n}\right| < 1 \Longleftrightarrow \boxed{|x| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} \quad (*)},$$

o qual definiremos este número real positivo, como sendo o RAIO DE CONVERGÊNCIA da série, ou seja:

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$

Ou seja, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ possui raio de

convergência $R = \dfrac{1}{\lim_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right|}$, e

convergirá no INTERVALO DE CONVERGÊNCIA

$$|x| < R \quad \text{(DEVIDO A (*))},$$

i.e., converge em $-R < x < R$.

EXEMPLOS: obtenha o raio de convergência e o intervalo de convergência das séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} \cdot x^n$.

SOLUÇÃO:

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{3^n} \times \frac{3^{n+1}}{n+1} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\cancel{3^n} \cdot 3}{\cancel{3^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n+1} = 3 \Rightarrow \boxed{R = 3}$$

intervalo de convergência:

$$|x| < 3 \iff -3 < x < 3 \iff (-3, 3)$$

Vamos investigar nas extremidades:

- $x=-3$: teremos a série numérica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} \cdot (-3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (-1)^n \cdot \cancel{3^n}}{\cancel{3^n}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n = -1+2-3+4-5+6-\dots$$

(DIVERGE)

- $x=3$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\cancel{3^n}} \cdot \cancel{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} n = 1+2+3+4+\dots$$

(DIVERGE)

Logo, temos o intervalo: $(-3,3)$.

(COM EXTREMIDADES ABERTAS)

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{3n}} \cdot (x+2)^n$

$$\underset{\sim}{R} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^{3n}} \cdot \frac{2^{3(n+1)}}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot \cancel{2^{3n}} \cdot 2^3}{\cancel{2^{3n}} \cdot (n+1)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8n^2}{n^2+2n+1} = \underset{\sim}{8} \implies \boxed{R=8}$$

intervalo de convergência:

$$|x+2| < 8$$

$$-8 < x+2 < 8$$

$$\iff -10 < x < 6 .$$

nas extremidades:

- $x = -10$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{3n}} \cdot (-10+2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{3n}} \cdot (-8)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\cancel{2^{3n}}} \cdot (-1)^n \cdot \cancel{2^{3n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n^2 ,$$

(divergente)

- $x = 6$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{3n}} \cdot (6+2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\cancel{2^{3n}}} \cdot \cancel{8^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 ,$$

(diverge)

$\Rightarrow$ a série converge no intervalo $(-10, 6)$.

(c) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^{n-1} \cdot x^{n-1}}{\sqrt{n}} .$$ (EXERCÍCIO)